# Knotentheorie

## Was sind Knoten in der Mathematik und wie unterscheidet man sie?

Von Nils Berelsmann und Mathis Tobergte

### Was ist ein mathematischer Knoten?

Ein mathematischer Knoten unterscheidet sich von einem Knoten, der uns aus dem Alltag bekannt ist. Dies ist wichtig, damit mit dem Knoten gerechnet werden kann. Es gibt drei grundlegende Punkte, die einen mathematischen Knoten von einem Knoten aus dem Alltag unterscheiden.

1. Der Faden eines mathematischen Knotens besitzt keine Dicke, wie etwa ein Schnürsenkel.
2. Der Knoten muss geschlossen sein. Er hat also kein Ende und keinen Anfang.
3. Der Knoten lässt sich unendlich dehnen oder verkleinern.

Bestimmte Arten von Knoten werden in der Mathematik nicht beachtet, da sie nicht berechnet werden können. Ein Beispiel sind die „Wilden Knoten". Sie haben unendlich viele Knotungsprozesse und dieses kann mathematisch nicht erfasst werden. Um Knoten aber darstellen zu können wird ihnen in sogenannten Knotenprojektionen ein Dicke zugeordnet und damit man die dreidimensionalen Knoten drucken kann wird der „untere" Strang einer Kreuzung unterbrochen und der „überführende" Strang durchgezeichnet.

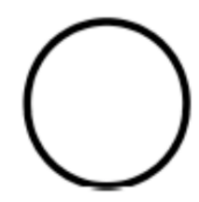


*Abb.1 Unknoten:*
*Bei einem Unknoten oder auch trivialen Knoten handelt es sich um einen Knoten, der nur aus einem Strang besteht und keine Kreuzungen beinhaltet. Der Unknoten bildet bei der Färbbarkeit von Knoten eine Ausnahme. Hierauf gehen wir später noch genauer ein.*

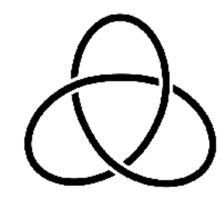


*Abb.2 Kleeblattknoten:*
*Bei einem Kleeblattknoten handelt es sich um den nächst einfachen Knoten nach dem Unknoten. Der Kleeblattknoten besteht aus drei Strängen und hat drei Kreuzungen. Es wird unterschieden zwischen dem rechts- und dem linkshändigen Kleeblattknoten. Bei der Spiegelung des rechtshändigen Kleeblattknotens erhält man den linkshändigen Kleeblattknoten.*

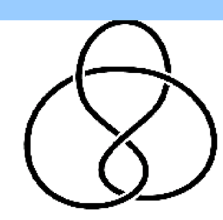


*Abb.3 Achterknoten:*
*Bei einem Achterknoten handelt es sich um einen Knoten, der aus vier Strängen besteht und vier Kreuzungen besitzt. Es gibt drei verschiedene Varianten des Achterknotens.*

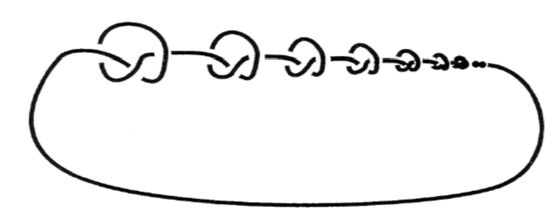
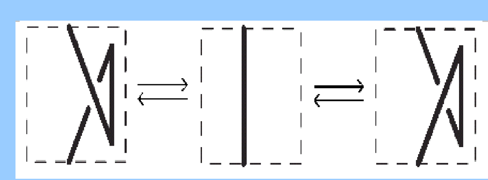


Abb. 4: Beispiel für einen wilden Knoten

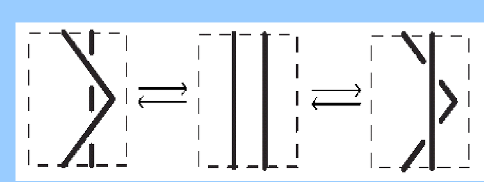
### Reidemeisterbewegungen:

Es scheint logisch zu sein, dass eine Knotendeformation identisch mit dem Knoten ist, aus dem sie hervorgegangen ist. Um sicher zu gehen, dass sich der Knoten bei der Deformation nicht verändert hat, ist dieses mathematisch zu beweisen. Eine Möglichkeit dafür bieten die Reidemeisterbewegungen. Durch die Reidemeisterbewegungen lassen sich Knoten in jede für den Knoten mögliche Deformation deformieren. Es gibt drei Reidemeisterbewegungen:

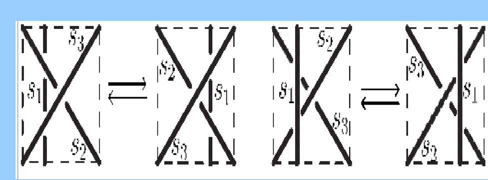
**1. Reidemeisterbewegung:**
Bei der ersten Reidemeisterbewegung wird eine Projektion ohne Doppelpunkt in eine Schleife oder von einer Schleife in eine Projektion ohne Doppelpunkt deformiert. (Bei einer Schleife liegen Unter- und Überkreuzung benachbart dar.)



**2. Reidemeisterbewegung:**
Bei der zweiten Reidemeisterbewegung werden zwei Stränge, die in der Projektion nicht miteinander verbunden sind, übereinander gelegt, sodass der eine Strang zwei Überkreuzungen und der Andere zwei Unterkreuzungen nebeneinander hat oder die inverse Operation.



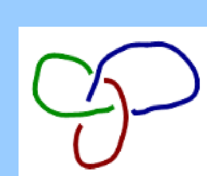
**3. Reidemeisterbewegung:**
Ein Strang, der die beiden Stränge einer Kreuzung über- oder unterkreuzt, wird über bzw. unter die Kreuzung hindurch geschoben.



Somit lässt sich sagen, dass zwei Knoten äquivalent sind, wenn sie durch eine bestimmte Anzahl an Reidemeisterbewegungen so deformiert werden können, dass sie die gleiche Projektion besitzen. Wenn sie nicht durch Reidemeisterbewegungen ineinander überführt werden können, sind sie nicht äquivalent. Da man aber nicht unendlich viele Bewegungen berechnen kann ist somit nur Zu sagen, dass zwei Knotenprojektionen die durch Reidemeisterbewegungen überführbar sind äquivalent sind nicht aber der Umkehrschluss.

### Dreifärbbarkeit

**Def.:** **Ein Knoten wird färbbar genannt, wenn jeder Bogen mit einer von drei Farben (z. B. rot, blau, grün) gekennzeichnet werden kann.**



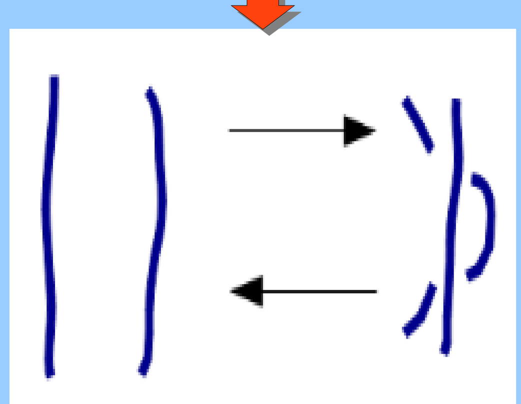
Unter einem Bogen ist ein Teil der Knotenprojektion, der von einer Unterkreuzung bis zur nächsten Unterkreuzung geht, zu verstehen. Dabei müssen mindestens zwei Farben verwendet werden und an einer Kreuzung, wo zwei Farben vorkommen, muss auch die dritte Farbe vorkommen. .

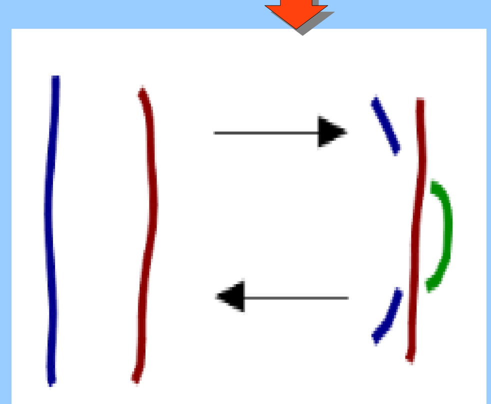
**Satz:** Wenn ein Diagramm des Knotens dreifärbbar ist, so sind auch alle anderen Diagramme dreifärbbar.

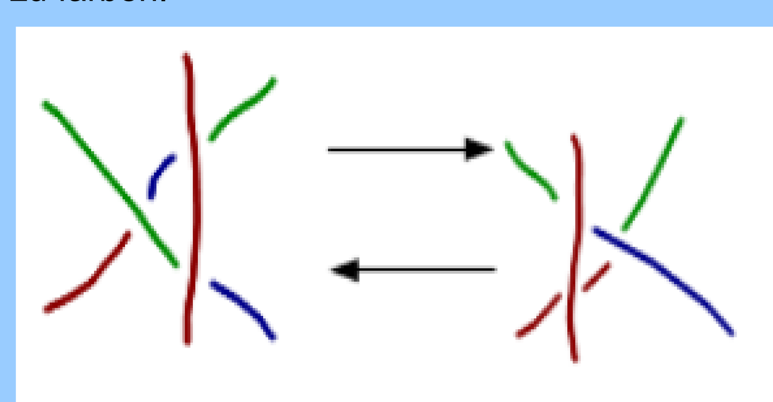
**Beweis:** Die erste Reidemeisterbewegung (Reide1) fügt in einen einfarbigen Bogen eine Kreuzung hinzu. Diese ist dann einfarbig. Der Knoten, falls er vorher färbbar war, ist also immer noch mit den drei (oder der einen) Farbe(n) korrekt färbbar.

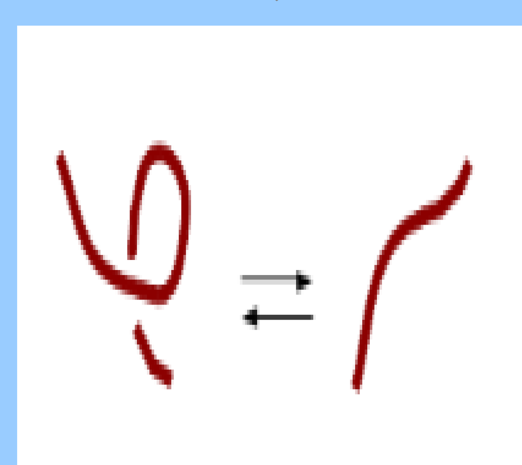
Die inverse Operation dazu (Reide1') kann nur gleichfarbige Kreuzungen auflösen. Also bleibt die Färbung des Diagramms gleich, wenn aus zwei gleichfarbigen Bögen nun einer im Knoten ist.

Bei der zweiten Reidemeisterbewegung (Reide2) gib es zwei Möglichkeiten die Bögen zu färben.







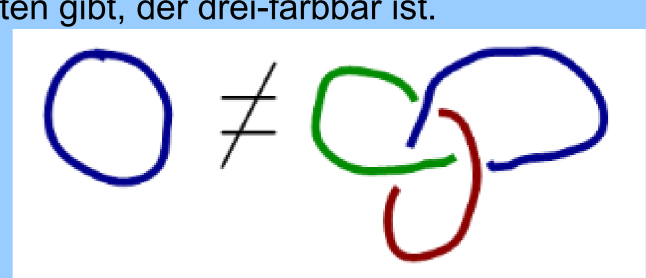


Bei der dritten Reidemeisterbewegung gibt es nun drei Möglichkeiten, wie die Bögen an den drei Kreuzungen gefärbt sein können. z.B.:

Stellt man sich das Diagramm vor, dass es wirklich aus Schnüren besteht, so ist zu beobachten, dass die Seilenden, die den Rand des Ausschnittes berühren, immer die selben Farben behalten,egal welche Reidemeisterbewegung ausgeführt wird. Deshalb ist der Rest des Diagramms von der Bewegung nicht betroffen und die Dreifarbigkeit bleibt erfüllt.

So können wir erkennen, dass der Unknoten nicht dreifarbig ist. Aufgrund der Färbbarkeit können wir sagen, dass ein dreifarbiger Knoten und der Unknoten nicht äquivalent sind. Allerdings haben wir noch nicht bewiesen, dass es überhaupt einen Knoten gibt, der drei-färbbar ist.

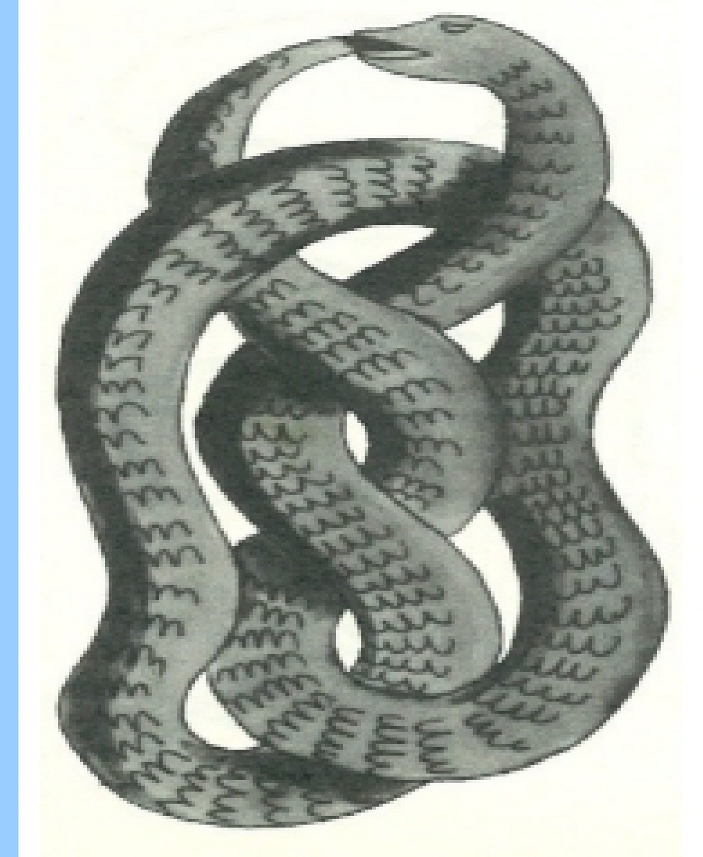
**Satz:** Der Kleeblattknoten ist nicht äquivalent zu dem Unknoten



**Beweis:** Wir färben den Kleeblattknoten nach der Definition ein und erkennen so das er drei-färbbar und somit nicht der selbe Knoten wie der Unknoten ist.

### Weiteres zu unserer Facharbeit:

Wir hatten das unglaubliche Glück, dass wir bei der Erstellung unsere Facharbeit in enger Kooperation mit der Universität Osnabrück standen. Denn auch für unsere betreuende Lehrerin Frau Schlöter war Knotentheorie Neuland. So aber konnten wir uns immer an Frau Dr. rer. nat. Plümer wenden. Da wir die ersten unserer Schule waren, die bei ihrer Facharbeit im Fach Mathematik von der Uni mitbetreut wurden durften wir die Facharbeit auch zusammen verfassen. Neben den Themen die hier auf diesem Plakat Angerissen werden, haben wir uns in unserer Facharbeit mit weiteren Invarianten wie z.B. Der Komponentenzahl, der Etikettierbarkeit modulo p, der Kreuzungszahl, und der Entknotungszahl beschrieben und an denn Reidemeisterbewegungen bewiesen. Dazu kommt dann noch ein Kapitel zu Anwendungen und der Geschichte der Knotentheorie. Neben diesen Themen hatten wir uns in der Vorbereitung noch mit tiefer mathematischen Invarianten und Polynomen wie dem Jones- als Kaufmann-Klammer-Polynom beschäftigt aber gemerkt, dass die Niederschrift den Rahmen der Facharbeit gesprengt hätte. Im Zuge der Facharbeit konnten wir feststellen, dass Mathematik mehr als nur Zahlen und Formeln sind, sondern weit über die Bereiche der Schulmathematik hinausgeht.



Dies ist eine künstlerische Darstellung eines Knoten. Nach einem Modell von Lord Kelvin bestehen alle Elemente aus Knoten und Verschlingungen im sogenannten Äther.