# Einführung in die Singularitätentheorie

Julio José Moyano Fernández

Wintersemester 2007/08

# Vorwort

Dieses Skript entspricht der Vortragsreihe, die ich im Wintersemester 2007/08 im Rahmen der Arbeitsgemeinschaft Komplexe Analysis, Algebraische Geometrie und Kommutative Algebra gehalten habe.

Ziel dieser Vorlesungen war, eine grundlegende Einführung in die Kurvensingularitäten zur Verfügung zu stellen.

Die Zusammenstellung erhebt keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit, sondern nur einen Führer, für was ich in den Vorträgen erklärt habe.

Osnabrück, März 2008.

Julio José Moyano Fernández

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Einleitung

Der Begriff der Singularität erscheint in vielen Zweigen der Mathematik und der Physik. Wir sind interessiert an Singularitäten, die in komplexen (oder analytischen) polynomischen Gleichungssystemen auftauchen. Mit anderen Worten: wir möchten Singularitäten von komplexen algebraischen (oder analytischen) ebenen Kurven studieren.

Dafür werden wir die Kurve in einer beliebig kleinen Umgebung eines gegebenen Punktes analysieren, und zwar bezüglich der Euklidischen Topologie, nicht der Zariski Topologie. Was bedeutet dies von einem algebraischen Standpunkt? Es bedeutet: Wir müssen nur konvergente (oder formale) Potenzreihenringe betrachten, besser als affine Ringe oder Lokalisierungen von affinen Ringen in Idealen.

Ein **konvergenter Potenzreihenring** (bzw. **formaler Potenzreihenring**) über $\mathbb{C}$ ist der Ring von Ausdrücken

$$\sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n}^{\infty} a_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} x_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n}$$

mit $a_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}\in\mathbb{C}$, der konvergent (resp. nicht konvergent) ist. Man bezeichnet ihn als $\mathbb{C}\{x_1,\ldots,x_n\}$ (bzw. $\mathbb{C}[[x_1,\ldots,x_n]]$). Ein solcher Ring ist lokal, mit maximalem Ideal $(x_1,\ldots,x_n)$. Das ist so, denn wenn wir ein Element $s$ in irgendeinem Ring wählen, $s=\sum_{i\geq 0} s_i$ ($s_i$ homogenes Polynom vom Grad $i$), dann ist $s$ invertierbar genau dann, wenn $s$ keinen von Null verschiedenen unabhängigen Term hat, also genau dann, wenn $s\notin(x_1,\ldots,x_n)$.

Wir sollten nun über den Begriff *lokal* in algebraischer Geometrie diskutieren. Im Wesentlichen kann *lokal* bedeuten:

i) eine affine Umgebung von einem Punkt, i.e., der affine Ring $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]/I$, mit $I$ ein Ideal von $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$.

ii) die Betrachtung der Lokalisierung $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]_{\mathfrak{p}}/I$, mit $\mathfrak{p}$ ein Primideal von $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ und $I\subset\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]_{\mathfrak{p}}$ ein Ideal.

iii) konvergenter oder formaler Potenzreihenring $\mathbb{C}\{x_1,\ldots,x_n\}/I$.

Wenn $\mathbf{x}$ die Menge von Unbestimmten $x_1,\ldots,x_n$ bezeichnet, gelten die folgenden Inklusionen:

$$\mathbb{C}[\mathbf{x}]/I\subset\mathbb{C}[\mathbf{x}]_{\langle\mathbf{x}\rangle}/I\cdot\mathbb{C}[\mathbf{x}]_{\langle\mathbf{x}\rangle}\subset\mathbb{C}\{\mathbf{x}\}/I\cdot\mathbb{C}\{\mathbf{x}\}\subset\mathbb{C}[[\mathbf{x}]]/I\cdot\mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$$

Der erste Ring kann als der "wenigst" lokale Ring betrachtet werden, denn er ist in der Tat nicht lokal, wenn die durch $I$ definierte Varietät nicht aus genau einem Punkt besteht; der letztere Ring ist so der "lokalste" Ring.

Also *warum interessieren wir uns für Umgebungen in der Euklidischen Topologie?*

Die Antwort ist mit dem Begriff von *Invariante* verbunden: Es gibt Invarianten von Singularitäten, die für formalen oder konvergenten Potenzreihen definiert sind, aber nicht für Lokalisierungen der Art $\mathbb{C}[\mathbf{x}]_{\langle \mathbf{x} \rangle}$.

Betrachten wir als Beispiel in der komplexen affinen Ebene $\mathbb{C}^2$ die Kurve $C$ mit der affinen Gleichung

$$y^2 = x^2(x+1).$$

Wir studieren diese Kurve zunächst mit Hilfe einer Parametrisierung:

$$t \mapsto (x(t), y(t)).$$

Eine solche Parametrisierung erhalten wir leicht durch Projektion von $C$ aus dem Doppelpunkt $(0,0)$ auf die Gerade $x = 1$. Die Gerade mit Gleichung

$$y = tx$$

schneidet die Gerade $x = 1$ in $y = t$ und die Kurve $C$ außer in $(0,0)$ in $x = t^2 - 1, y = t^3 - t$. Also nehmen wir als Parametrisierung von $C$:

$$\begin{aligned} x(t) &= t^2 - 1 \\ y(t) &= t^3 - t \end{aligned}$$

Dies ist eine rationale, überall definierte Abbildung $\phi$ der Geraden $\mathbb{C}$ auf die Kurve $C$. Bei dieser werden die Punkte $t = 1$ und $t = -1$ in den singulären Punkt $(0,0)$ von $C$ abgebildet. Im übrigen ist die durch die Parametrisierung definierte Abbildung $\mathbb{C} \setminus \{1, -1\} \to C \setminus \{0\}$ bijektiv und die Umkehrabbildung ist rational und überall definiert. Der singuläre Punkt ist also in $\mathbb{C}$ durch zwei Punkte ersetzt worden, mit dem Resultat, dass jetzt eine nichtsinguläre Kurve, nämlich $\mathbb{C}$ entstanden ist. Außerhalb des singulären Punktes hat sich nichts geändert. Wir haben also in der Abbildung

$$\phi : \mathbb{C} \to C$$

ein besonders einfaches Beispiel für den Übergang von einer singulären zu einer singularitätenfreien Kurve vo; dieser Prozess werden wir später *Auflösung der Singularitäten* nennen.

Man kann irgendwie zeigen, dass der Durchnitt von $C$ mit einer geeigneten Umgebung $U$ des singulären Punktes in zwei nichtsingulären „Komponenten" zerfällt. Die Auflösung der Singularitäten besteht in diesem Falle darin, die beiden Komponenten zu "trennen".

Nun möchte man natürlich dieses Zerfallen der Kurve $C$ in zwei „Komponenten" oder, wie man auch sagt, „Zweigen" in der Umgebung des singulären Punktes auch analytisch mit Hilfe der Gleichung erfassen.

Die Gleichung von $C$ gegeben durch

$$f(x,y) = y^2 - x^2(x+1)$$

ist als Polynom irreduzibel. Die Kurve $C$ sollte also nur in geeignet gewählten, hinreichend kleinen Umgebungen zerfallen. Da stellt sich nun die Frage, was „hinreichend kleine Umgebung" heißen soll.

Die **Zariski-offenen Umgebungen** $U$ eines Punktes $P$ in der affinen Ebene entstehen z.B. dadurch, dass man aus $\mathbb{C}^2$ einige Punkte und Kurven, welche $P$ nicht treffen, entfernt.

Als rationale Funktionen auf $U$ lässt man alle rationalen Funktionen, d.h. Quotienten von Polynomen $\frac{p}{q}$ zu, deren Nenner auf $U$ nirgends verschwindet.

Die Vereinigung aller dieser rationalen Funktionen für alle Zariski-offenen Umgebungen von $P$ bildet einen Ring: Ist $\mathfrak{m} \subset \mathbb{C}[x,y]$ das maximale Ideal der in $P$ verschwindenden Polynome, dann ist dieser Ring gerade

$$\mathbb{C}[x,y]_{\mathfrak{m}} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p,q \in \mathbb{C}[x,y],\ q \notin \mathfrak{m} \right\}.$$

Man kann geometrisch einsehen, dass der Durchschnitt der Kurve $C$ mit einer Zariski-offenen Umgebung $U$ nicht in zwei Stücke zerfallen kann.

Denn $C \cap U$ entsteht aus $C$ durch Entfernen von einigen Punkten und von Schnittpunkten mit einigen Kurven, also jedenfalls durch Entfernen endlich vieler Punkte.

Entsprechend entsteht das Urbild $V = \phi^{-1}(C \cap U)$ aus $\mathbb{C}$, durch Entfernen endlich vieler Punkte und besteht also aus einer Komponente.

Wir sehen also, dass **die Zariski-offenen Umgebungen zu groß sind**, als dass in ihnen die Kurve zerfallen könnte.

Algebraisch würde der Reduzibilität eine Faktorisierung $f = f_1 \cdot f_2$ von $f$ in $\mathbb{C}[x,y]_{\mathfrak{m}}$ entsprechen, wobei $f_1$ und $f_2$ beide im maximalen Ideal von $\mathbb{C}[x,y]_{\mathfrak{m}}$ lägen. Das kann aber nicht geben, denn sonst wäre $f_i = \frac{p_i}{q_i}$ mit $p_i \in \mathfrak{m}$, $q_i \notin \mathfrak{m}$, also $q_1 \cdot q_2 \cdot f = p_1 \cdot p_2$, und die in $\mathfrak{m}$ liegenden irreduziblen Faktoren von $p_1$ und $p_2$ müssten beide $f$ teilen, im Wiederspruch zur Irreduzibilität von $f$.

Das Problem ist einfach nur, dass die Zariski Umgebungen zu groß sind (d.h. die algebraische lokale Ringe $\mathbb{C}[\mathbf{x}]_{\langle \mathbf{x} \rangle}/I \cdot \mathbb{C}[\mathbf{x}]_{\langle \mathbf{x} \rangle}$ sind zu klein). Wir werden also mit analytischen lokalen Ringen wie $\mathbb{C}\{\mathbf{x}\}/I \cdot \mathbb{C}\{\mathbf{x}\}$ (oder $\mathbb{C}[[\mathbf{x}]]/I \cdot \mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$) arbeiten.

Was **die geschichtliche Entwicklung der Singularitätentheorie** betrifft, muss man ihre Geburt mit der Geburt der algebraische Geometrie verbinden.

Ich merke an, dass die Dissertation von Riemann der Ursprung der modernen algebraischen Geometrie ist. In dieser Arbeit führt er den wichtigen Begriff vom **Geschlecht** einer ebenen Kurve ein, und zwar als die möglichst kleine ganze Zahl $g$, mit der Eigenschaft: für jedes Divisor $D$ auf der Kurve wird die Ungleichung $\ell(D) \geq \deg(D) + 1 - g$ erfüllt. Das Geschlecht ist die nötigste birrationale Invariante der klassischen projektiven Geometrie.

Leider sind alle Kurven nicht glatt, sie besitzen nämlich Punkte, in den die Tangente nicht definiert ist. Solche Punkte verhalten sich anders, und darauf muss man verschiedene Techniken anwenden. Wahrscheinlich waren K. Weierstraß [W] und L. Kronecker [Kr] die ersten, die diesen Fakt von einem geometrischen Standpunkt bemerkt haben.

Obwohl er schon früher in [N1] diesen Punkt in Frage gestellt hat, bewies Max Nöther 1882 [N2], dass jede ebene Kurve vom Grad $n$ mit $m$ ordinären singulären Punkten (d.h., Punkten mit Multiplizität $r_i$ und auch $r_i$ verschiedene Tangenten) hat das Geschlecht:

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{1}{2}\sum r_i(r_i-1).$$

Daraus folgt eine natürliche Frage: wie kann das Geschlecht einer ebenen Kurve mit *non-ordinary* Singularitäten berechnet werden. Das führt zu einer anderen Frage: kann man irgendwelche singuläre ebene Kurve zu einer anderen Kurve mit nur ordinären Singularität transformiert werden, nur mit Hilfe der birationallen Transformationen? Die Antwort ist positiv, sie wurde von L. Kronecker und Max Nöther gegeben. In der Tat kann sie betrachtet werden, als die erste Version eines Ergebnisses der Auflösung von Singularitäten für komplexe Kurven.

Ein nützliches Werkzeug in der algebraischen Behandlung einer Kurve ist, eine vernünftige Darstellung der Kurve in der Nähe des Punktes zu finden. Erst 1850 hat V. Puiseux ([P]) dies geschafft. Er hat die sogenannten Puiseuxreihen eingeführt. Diese Methode ist leider nur für über komplexe Zahlen definierte Kurven geeignet.

Die Puiseuxreihen erlauben, schnell Invariante der singulären Punkte zu berechnen. Zum Beispiel, aus den Puiseuxreihen haben die Mathematiker Halphen und Smith (s. [Hal1] und [Sm]) die Definition vom "charakteristischen Exponent" erhalten.

Der Einfluss von Puiseux in der Arbeit von Riemann war groß, aber bald haben Dedekind und Weber in [De-We] realisiert (und zwar nach ihrer Bearbeitung der Werke von Riemann), dass die Betrachtungen mit den komplexen Zahlen nur Spezialfälle von allgemeineren Begriffen waren. Was die Puiseuxreihen betrifft, hat Hamburger in [H] eine neue Art von lokalen Entwicklungen entdeckt, die einfach zu anderen Körpern verschieden von $\mathbb{C}$ verallgemeint werden konnte.

Darüber hinaus sind die durch Hamburger definierte Entwiklungen auch mehr als symbolische Sprache. Max Noether (s. [N3]) hat die Hamburgersche Arbeit vervollkommt und ein Wörterbuch eingeführt, zwischen solchen lokalen Entwicklungen der Kurve und ihren Prozess von Auflösung ihrer Singularitäten. Diese Reihen sind heute als *Hamburger-Noethersche Entwicklungen* bekannt (s. [C]).

Ende des 19. Jahrhunderts hat eine Schule in Italien unter der Schirmherrschaft von Guido Castelnuovo ihren Weg begonnen. Sie fahren mit der großen Arbeit fort, die die Deutschen in dem vorherigen Jahrhundert gestartet haben. Sie haben die Auflösung der Singularitäten von Kurven und Flächen systematisiert, und zwar mit Hilfe der unendlich nahen Punkten und ähnlichen Begriffen. Namen wie Enriques, Chinisi, Severi oder Zariski kommen einem schnell bekannt vor diesem Zusammenhang. Zariski war zusammen mit Muhly, der Erste, der einen allgemeinen Beweis für die Auflösung von Singularitäten für projektive Kurven in beliebiger Charakteristik gegeben hat. Im Jahr 1964 hat H. Hironaka einen Artikel veröffentlicht, mit dem er das Problem der Auflösung in alle Dimensionen und für die Charakteristik Null gelöst hat. Es ist aber immer noch ein offenes Problem für beliebig Charakteristik.

# 2 Einführende Begriffe

Im diesem Kapitel werden wir die notwendigen Wortschatz und Bezeichnungen beschreiben, den wir im Folgenden benutzen werden: Die Begriffe von Fläche, Kurven, lokalen Koordinaten, Keime von holomorphen Funktionen, Kurvenkeime, Multiplizität und Tangente.

## 2.1 Flächen

Wir interessieren uns für irreduzible zusammenhängende reguläre komplexe analytische Flächen, weil die zu betrachtenden Kurven auf dieser Art von Flächen liegen. Das wichtigste daran: man kann solche Flächen mit offenen Mengen überdecken, jede isomorph zu einer offenen Untermenge von $\mathbb{C}^2$.

Sei $O$ ein Punkt auf einer solchen Fläche. Dann existiert eine offene Umgebung $U$ von $O$ und Funktionen $x, y : U \to \mathbb{C}$, die einen analytischen Isomorphismus von $U$ zu einer offenen Untermenge $U' \subseteq \mathbb{C}^2$ geben. Er sendet jeden Punkt $p \in U$ zu $(x(p), y(p)) \in U'$ (im Besonderen, $O \mapsto (0,0)$). Man sagt, dass $x, y$ ein *lokales Koordinatensystem* in $O$ ist. Also identifizieren wir Punkte in $U$ mit Punkten in $U'$ und wir schreiben $(x, y)$ für den Punkt, die lokalen Koordinaten $x, y$ hat.

## 2.2 Lokaler Ring eines holomorphen Funktionskeimes

Sei $F$ eine Fläche und $O \in F$ ein Punkt von $F$. Sei

$$A := \{(U, f) \mid U \subseteq F \text{ offen }, O \in U, f : U \to \mathbb{C} \text{ holomorph}\}.$$

Setzen wir folgende Äquivalenzrelation ein: $(U, f)$ $(V, g)$ genau dann, wenn eine offene Menge $W \subset U \cap V$ existiert, so dass $O \in W$ und $f|_W = g|_W$.

Der Restklassenring $A/ \ =: \mathscr{O}_{F,O}$ wird der **Ring von Funktionenkeimen** genannt. Sowohl die Summe als auch das Produkt sind wohl definiert:

$$[(U, f)] + [(V, g)] = [(V \cap U), f + g]$$

$$[(U, f)] + [(V, g)] = [(V \cap U), f \cdot g]$$

Wichtige Eigenschaften davon sind:

- Der Ring $\mathscr{O}_{F,O}$ ist lokal, mit maximalem Ideal

$$\mathscr{M}_{F,O} = \{f \in \mathscr{O}_{F,O} \mid f(O) = 0\}$$

und Restklassenkörper $\mathscr{O}_{F,O}/\mathscr{M}_{F,O} \cong \mathbb{C}$.

- Wenn $\{x,y\}$ ein lokales Koordinatensystem von $O$ ist, dann führt die Darstellung von jeder holomorphen Funktion als Potenzreihe zu einem Isomorphismus $\varphi : \mathscr{O}_{F,O} \to \mathbb{C}\{x,y\}$. Die Abbildung $\varphi$ ist injektiv, weil die Potenzreihenentwicklung einer Funktion $f$ in einer Umgebung von $O$ gegen $f$ konvergiert und damit der Keim von $f$ in $O$ eindeutig bestimmt ist; sie ist aber auch surjektiv, denn jede konvergente Potenzreihe konvergiert in einer Umgebung des Entwicklungspunktes gegen eine holomorphe Funktion. Daraus folgt, dass $\mathscr{O}_{F,O}$ ein zwei-dimensionaler regulärer lokaler Ring ist.

## 2.3 Kurven

Eine (analytische) Kurve $\xi$ ist in einer offenen Menge $U$ von $F$ definiert, als ein System $(U_i, f_i)_{i\in I}$ mit den folgenden Eigenschaften:

- jedes $U_i$ ist eine nicht-leere zusammenhängende offene Untermenge von $U = \bigcup_{i\in I} U_i$
- jedes $f_i$ ist eine verschieden von Null holomorphe Funktion in $U_i$
- für jede $i, j \in I$ mit $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, dann existiert eine Funktion $u_{ij}$ (die holomorph ist, und keine Nullstellen in $U_i \cap U_j$ hat) so dass $f_i = u_{ij} f_j$ in $U_i \cap U_j$.

Die holomorphe Funktion $f_i$ wird als eine lokale Gleichung von $\xi$ in $U_i$ bezeichnet. Da unser Interesse lokal ist, definiert jede holomorphe Funktion $f$ verschieden von Null in eine nicht-leere zusammenhängende offene Untermenge $U$ einer Kurve $\xi$. Die wird als $\xi : f = 0$ bezeichnet.

Sei $P \in U$ ein Punkt, $\xi : (U_i, f_i)_{i\in I}$ eine Kurve auf $F$. Man sagt, dass $P$ ein Punkt von $\xi$ ist (oder, dass ein Punkt $P$ auf $\xi$ liegt) , wenn ein $i \in I$ mit $P \in U_i$ und $f_i(P) = 0$ existiert. Die Menge aller Punkte der Kurve $\xi$ wird als $\mathrm{supp}(\xi)$ bezeichnet.

Zwei Kurven können in folgendem Sinne addiert werden. Sei $\xi_1 : \{(U_i, f_i)\}_{i\in I}$ und $\xi_2 : \{(V_j, g_j)\}_{j\in J}$. Dann ist die Summe von $\xi_1$ und $\xi_2$:

$$\xi_1 + \xi_2 := \{(U_i \cap V_j, f_i \cdot g_j)\}_{i\in I, j\in J}.$$

Eine Kurve $\zeta$ ist eine Komponente von $\xi$, wenn eine andere Kurve $\zeta'$ existiert, so dass $\xi = \zeta + \zeta'$. Eine Kurve heißt irreduzibel, wenn sie keine verschiedenen Komponenten hat.

## 2.4 Kurvenkeime

Wir schränken Kurven zu kleineren offenen Mengen ein, mir einer Einschränkung ihrer Gleichungen.

Man sagt, dass zwei Kurven, die zu derselben Kurve in einer geeigneten offenen Umgebung einer geschlossenen Menge $K$ eingeschränkt werden, *den gleichen Keim* in $K$ haben.

Ein Kurvenkeim in $O$ ist eine Äquivalenzklasse von Kurven, um $O$ definiert, modulo folgender Äquivalenzrelation: "dieselbe Einschränkung zu einer offenen Umgebung von $O$ zu haben". Der Punkt $O$ heißt der Ursprung des Keimes. Ein solcher Keim wird als $\xi_O$ bezeichnet.

Funktionen, die den gleichen Keim in $O$ haben, definieren in einer Umgebung von $O$ Kurven, die den gleichen Keim in $O$ haben: wir nehmen die Keime in $O$ aller Gleichungen aller Repräsentanten von $\xi$ als Gleichungen eines Keimes einer Kurve $\xi$ in $O$. Die Bezeichnung dafür ist: $\xi_O : f = 0$, d.h. der Kurvenkeim $\xi_O$ hat in $O$ eine Gleichung $f = 0$.

Angenommen, dass $\xi$ und $\zeta$ (mit Gleichungen $f$ bzw. $g$) Kurven in einer offenen Umgebung von $O$ sind. Nach der Definition von Kurve, stimmen die Einschränkungen von $\xi$ und $\zeta$ zu eigener offenen Umgebung von $O$ überein, genau dann, wenn $\frac{f}{g}$ holomorph und ohne Nullstellen in einer Umgebung von $O$ ist. Das heißt, genau wenn der Keim von $\frac{f}{g}$ invertierbar in $\mathscr{O}_{F,O}$ ist. Also, wenn $f,g$ verschieden von Null Keime holomorpher Funktionen in $O$ sind, sind sie Gleichungen derselbe Keim genau dann, wenn der Keim von $\frac{f}{g}$ eine Einheit in $\mathscr{O}_{F,O}$ ist. Darüber hinaus hat man eine Korrespondenz zwischen den Kurvenkeimen in $O$ und den nicht-trivialen Hauptideale des Ringes $\mathscr{O}_{F,O}$. Das Ideal $(1)$ entspricht also dem Keim $\emptyset$. Es kann auch die Summe von Keimen durch die Multiplikation seiner Gleichungen realisieren. Ein nicht leerer Keim heißt irreduzibel, wenn er durch keine Summe von nicht leeren Keimen gebildet werden kann.

Die Beziehung zwischen Kurvenkeimen und verschiedenen von Null Hauptideale von $\mathscr{O}_{F,O}$ erlaubt den lokalen Ring eines Kurvenkeimes $\xi : f = 0$ zu definieren, als:

$$\mathscr{O}_\xi := \mathscr{O}_{F,O}/(f).$$

Er ist ein ein-dimensionaler lokaler Ring, mit einem maximialen Ideal $\mathfrak{m}_\xi := \mathscr{M}_{F,O}/(f)$.

Sei $F$ eine Fläche mit $O \in F$. Sei $\xi_O$ ein Kurvenkeim in $O$.

**Satz 2.1**
Es existiert eine einzige Zerlegung

$$\xi_O = n_1\gamma_1 + \ldots + n_k\gamma_k$$

mit $\gamma_i$ eine irreduzible Keim, $\gamma_i \neq \gamma_j$ für $i \neq j$ und $n_i > 0$ für jedes $i \in \{1,\ldots,k\}$.

*Beweis.* Wenn $f$ eine Gleichung von $\xi_O$ ist, dann gilt

$$f = f_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot f_k^{n_k}.$$

Dann kann man die Eigenschaft der Faktorisierung des Ringes anwenden. □

Mit derselben Bezeichnung, die Elemente $\gamma_1,\ldots,\gamma_k$ heißen Zweige (oder irreduzible Komponenten) von $\xi$. Für $i \in \{1,\ldots,k\}$, der Zweig $\gamma_i$ heißt reduziert (bzw. vielfach) falls $n_i = 1$ (bzw. $n_i > 0$). Eine Kurve $\xi$ heißt reduziert in $O$, falls der Keim $\xi_O$ reduziert ist, d.h., falls $n_1 = \ldots = n_k = 1$ wenn $\xi_O = n_1\gamma_1 + \ldots + n_k\gamma_k$ eine Zerlegung in irreduziblen Komponenten von $\xi_O$ ist.

## 2.5 Multiplizität und Tangentialkegel

Sei $\xi_O : f = 0$ ein Kurvenkeim in $O$. Es existiert ein $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ mit $f \in \mathscr{M}_{F,O}^m \setminus \mathscr{M}_{F,O}^{m+1}$. Diese Zahl heißt die Ordnung von $f$ in $O$. Die Klasse $[f]$ von $f$ in $\mathscr{M}_{F,O}^m / \mathscr{M}_{F,O}^{m+1}$ heißt die Leitform von $f$.

Nehmen wir an, dass der Keim $\xi_O$ zwei verschiedene Gleichungen $f, f'$ hat. Dann existiert ein Element $u$ invertiebar mit $[f'] = [u] \cdot [f]$. Daraus folgt, dass alle Gleichungen von $\xi_O$ diesselbe Ordnung haben. Sie heißt die Multiplizität des Kurvenkeimes $\xi_O$ (oder auch die Multiplizität von $f$ in $O$). Wir bezeichnen sie als $\mathrm{mult}_O(\xi) = \mathrm{mult}(\xi) = m_O(\xi)$.

*Bemerkung*. Sei $\xi_O$ ein Kurvenkeim mit $\mathrm{mult}(\xi_O) = 0$. Dann ist es $\xi_O = \emptyset$.

Die Menge aller Leitformen eines Keimes $\xi_O$ definiert derselbe algebraischen Kegel auf den Tangentraum. Er heißt der Tangentialkegel zu $\xi_O$.

Sei $\{x, y\}$ ein lokales Koordinatensystem von $O$. Sei $f(x, y) = \sum_{i,j \geq m} a_{ij} x^i y^j = 0$ die Gleichung eines Keimes $\xi_O$ mit $m := \mathrm{mult}(\xi_O)$. Der Tangentialkegel hat eine Gleichung $\sum_{i+j=m} a_{ij} x^i y^j = 0$, d.h., ein homogenes Polynom in zwei Variablen, das in einem Produkt von linearen Faktoren (also Geraden) zerlegt. Der Tangentialkegel ist also ein Kegel von Geraden, die tangent auf der Kurve durch den Punkt $O$ sind.

## 2.6 Singularitäten und glatte Keime

Sei $\xi_O$ ein Kurvenkeim in $O$. Er heißt singulär, wenn $\mathrm{mult}(\xi) > 1$. Die nicht-singulären nicht-leeren Keime heißen glatte Keime.

*Bemerkungen*.

**(1)** Glatte Keime müssen irreduzibel sein.

**(2)** Der Tangentialkegel von glatten Keimen ist eine einmal gezählte Gerade.

Sei $\{x, y\}$ ein lokales Koordinatensystem in der Umgebung $U$ eines Punktes $P = (a, b)$. Sei $\{\bar{x}, \bar{y}\}$ ein Koordinatensystem von $O$, also, $\bar{x} = x - a$ und $\bar{y} = y - b$. Sei $g$ eine holomorphe Funktion in $U$. Dann ist

$$g = \sum_{i,j \geq 0} a_{ij} \bar{x}^i \bar{y}^j$$

um $P$ und $g$ definiert eine Kurve $\xi$ in $P$, i.e., $a_{00} = g(P) = 0$. Dann ist $\xi$ glatt, genau dann wenn entweder $a_{10} \neq 0$ oder $a_{01} \neq 0$ (und in einem solchen Fall ist die Gerade $a_{10}\bar{x} + a_{01}\bar{y} = 0$ seine Tangente in $P$). Da

$$a_{10} = \left.\frac{\partial g}{\partial \bar{x}}\right|_{(0,0)} = \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(a,b)}$$

$$a_{01} = \left.\frac{\partial g}{\partial \bar{y}}\right|_{(0,0)} = \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{(a,b)}$$

daraus folgt, dass der Keim $\xi$ glatt in $P$ ist genau wenn entweder $\frac{\partial g}{\partial x}$ oder $\frac{\partial x}{\partial y}$ ungleich Null in $P$ ist. Also die Menge aller singulären Punkte von $\xi$ in $U$ sind genau die Punkte, die die folgende Gleichungen erfüllen:

$$f(0,0) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} = 0.$$

Im Besonderen ist diese Menge abgeschlossen in $U$.

**Definition 2.1**
Zwei Kurvenkeime heißen transversal in einem Punkt $P$, wenn sie glatt sind und sie verschiedene Tangenten in $P$ haben.

**Satz 2.2**
Sei $\xi_O : f = 0$ ein Kurvenkeim. Er ist glatt genau dann, wenn das maximale Ideal $\mathfrak{m}_\xi$ ein Hauptideal ist. In diesem Fall ist $\mathfrak{m}_\xi$ für die Klasse einer Gleichung jeden Keimes transversal zu $\xi_O$, und ferner gilt folgender Isomorphismus: $\mathscr{O}_\xi \cong \mathbb{C}\{t\}$.

## 2.7 Parametrisierungen

Sei $F$ eine Fläche, $O$ ein Punkt von $F$ und $\gamma$ eine Kurve, die irreduzibel in $O$ ist. Sei $\gamma_O$ ein Keim von $\gamma$ in $O$.

**Definition 2.2**
Sei $U$ eine offene Menge von $\mathbb{C}$. Eine holomorphe Abbildung $\sigma : U \to \gamma$ ist die Einschränkung einer holomorphen Abbildung $\sigma : U \to F$ so dass $\sigma(U) \subset \mathrm{supp}(\gamma)$.

**Definition 2.3**
Eine Parametrisierung des Keimes $\gamma_O$ ist der Keim in $0 \in \mathbb{C}$ einer holomorphen injektiven Abbildung $\sigma : U \to \gamma$ so dass $0 \in U$ und $\sigma(0) = O$.

Was besagt das? Sei ein lokales Koordinatensystem $\{x,y\}$ von $O$. Eine solche Abbildung $\sigma$ zu geben, ist das Gleiche, wie zwei Koordinaten $(a(t),b(t))$ einzuführen, so dass:

- $a(t),b(t) \in \mathbb{C}\{t\}$ aber keine Einheiten sind
- $\sigma(0) = O$, i.e., $a(0) = b(0) = 0$
- falls $f(x,y)$ eine Gleichung von $\gamma_O$ bezüglich $\{x,y\}$ ist, dann gilt $f(a(t),b(t)) \equiv 0$.

*Bemerkung*. Seien der Ring $\mathbb{C}\{t\}$ und $f \in \mathbb{C}\{t\}$. Die Ordnung von $f$ wird als $\mathrm{ord}_t(f)$ bezeichnet.

Seien $\gamma,\gamma'$ zwei irreduzible Kurvenkeime von $O$. Betrachten wir ein lokales Koordinatensystem $\{x,y\}$ in $O$. Sei $f(x,y)$ eine Gleichung von $\gamma$ bezüglich $\{x,y\}$. Nehmen wir an, dass $\gamma'$ eine Parametrisierung $(a(t),b(t))$ besitzt.

**Definition 2.4**
Man definiert die Schnittmultiplizität der Keime $\gamma,\gamma'$ als:

$$[\gamma,\gamma'] := \mathrm{ord}_t\left(f(a(t),b(t))\right).$$

Betrachten wir nun reduzierte Kurvenkeime $\xi = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$ und $\xi' = \gamma_1' + \ldots + \gamma_{n'}'$ in $O$. Dann definiert man die Schnittmultiplizität von $\xi$ und $\xi'$ als:

$$[\xi, \xi'] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n'} [\gamma_i, \gamma_j']$$

# 3 Der Newton-Puiseux Satz

Wahrscheinlich war Newton der Erste, der Entwicklungen in der Nähe eines Punktes (also lokalen Entwicklungen) eingeführt hat. Newtons Ziel war aber, eine Gleichung der Gestalt $P(x,y)=0$ zu lösen, wobei

$$P(x,y)=\sum_{i,j} A_{i,j}x^iy^j$$

ein Polynom in den zwei Unbestimmten $x,y$ ist. Dafür hat er sich vorgenommen, $y$ als eine Funktion von $x$ zu beschreiben. Zunächst einmal musste er $y$ als eine Potenzreihe entwicklen:

$$y=\sum_{k\geq 0} b_kx^k.$$

Mit Hilfe von Polynomen in $x$ vom steigenden Grad erhält Newton eine "schrittweise Annährung". Die einzige Einschränkung ist, ausreichend kleine Werte von $x$ zu nehmen. Damit ist sicher, dass wir in einer Umgebung von einem Punkt der Gestalt $(0,y_0)$ auf der Kurve $P(x,y)=0$ sind, und so gilt $P(0,y_0)=0$. Diese Aussage ist in „De Methodus Fluxionum et Serierum infinitorum" (1664-1671 geschrieben; siehe auch: D.T. Whiteside, „The mathematical papers of Isaac Newton" Cambridge U.P. vol. III (1670-1673), 1969, pp. 51-57) enthalten.

## 3.1 Gebrochene Potenzreihen. Puiseux Entwicklungen

Sei $f(x,y)$ eine irreduzible Potenzreihe. Wir suchen Ausdrücke $x(t),y(t)\in\mathbb{C}[[t]]$ so dass $f(x(t),y(t))=0$ und $a(0)=b(0)=0$.

Wir betrachten den Ring aller formellen Potenzreihen in einem Unbestimmten $x$ über $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{C}[[x]]:=\left\{\sum_{i=0}^{\infty} a_ix^i \mid a_i\in\mathbb{C}\right\}.$$

Dieser Ring ist in der Tat ein lokaler Integritätsring. Wir wissen auch, dass ein Element $\sum_{i=0}^{\infty} a_ix^i$ eine Einheit ist, genau wenn $a_0\neq 0$. Betrachten wir jetzt den Quotientenkörper von $\mathbb{C}[[x]]$:

$$\mathbb{C}((x))=\left\{\frac{f}{g}\mid f,g\in\mathbb{C}[[x]],g\neq 0\right\}.$$

Er kann aber auch auf eine andere Art geschrieben werden. Wenn $f=\sum_{i=0}^{\infty} a_ix^i$ und $g=\sum_{i=0}^{\infty} b_ix^i$, existiert eine ganze Zahl $d$ mit $b_d\neq 0$ (denn $g\neq 0$) so dass

$$\frac{f}{g}=\frac{\sum_{i=0}^{\infty} a_ix^i}{\sum_{i=d}^{\infty} b_ix^i}=\frac{\sum_{i=0}^{\infty} a_ix^i}{x^d(\sum_{i=d}^{\infty} b_ix^{i-d})}=\frac{\sum_{i=0}^{\infty} c_ix^i}{x^d}=\sum_{i=0}^{\infty} c_ix^{i-d}.$$

Wir haben also:

$$\mathbb{C}((x)) = \left\{ \sum_{i=d}^{\infty} a_i x^i \mid d \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{C} \right\}.$$

Sei $n > 1$ eine ganze Zahl. Wählen wir eine freie Unbestimmte $T_n$ aus, und betrachten wir folgenden Körpermonomorphismus:

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{1,n}: & \mathbb{C}((x)) & \longrightarrow & \mathbb{C}((T_n)) \\ & x & \mapsto & (T_n)^n \\ & \sum_{i=d}^{\infty} a_i x^i & \mapsto & \sum_{i=d}^{\infty} a_i (T_n)^{ni} \end{array}$$

Also ist $\mathbb{C}((x))$ isomorph zu manchem Unterkörper von $\mathbb{C}((T_n))$ und wir identifizieren sie:

$$\mathbb{C}((x)) \subset \mathbb{C}((T_n)).$$

Wir identifizieren also die Elemente von $\mathbb{C}((x))$ und ihre Bilder via $\varphi_{1,n}$. Im Besonderen nach dieser Identifizierung haben wir $x = T_n^n$. Im Folgenden schreiben wir $x^{\frac{1}{n}}$ statt $T_n$ (nur Bezeichnung!). D.h., $x = (x^{\frac{1}{n}})^n$ und wir bezeichnen die Potenze $(x^{\frac{1}{n}})^i$ von $x^{\frac{1}{n}}$ als $x^{\frac{i}{n}}$:

$$x^{\frac{i}{n}} := (x^{\frac{1}{n}})^i.$$

Ein Element von $\mathbb{C}((x^{\frac{1}{n}})) = \mathbb{C}((T_n))$ sieht so aus:

$$s = \sum_{i=d}^{\infty} a_i x^{\frac{i}{n}}.$$

Seien $m, n \in \mathbb{Z}$ so dass $n|m$, d.h., es existiert $r \in \mathbb{Z}$ mit $m = nr$. Dann erhalten wir folgenden Monomorphismus:

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{n,m}: & \mathbb{C}((x^{\frac{1}{n}})) & \longrightarrow & \mathbb{C}((x^{\frac{1}{m}})) \\ & x^{\frac{1}{n}} & \mapsto & (x^{\frac{1}{m}})^r \\ & \sum_{i=d}^{\infty} a_i (x^{\frac{1}{n}})^i & \mapsto & \sum_{i=d}^{\infty} a_i (x^{\frac{1}{m}})^{ri} \end{array}$$

Also können wir gleichsetzen: $x^{\frac{1}{n}} = (x^{\frac{1}{m}})^r \underbrace{=}_{\text{Bezeichnung}} x^{\frac{r}{m}}$ und so

$$x^{\frac{i}{n}} \underbrace{=}_{\text{Bezeichnung}} (x^{\frac{1}{n}})^i = (x^{\frac{1}{m}})^{ri} \underbrace{=}_{\text{Bezeichnung}} x^{\frac{ri}{m}}$$

also $\frac{i}{n} = \frac{ri}{m}$ (sie sind *gebrochene Exponenten*).

Mit anderen Wortern, die Monomorphismen $\varphi_{n,m}$ bringen kommutative Diagramme

$$\varphi_{n,\tilde{n}} = \varphi_{m,\tilde{n}} \circ \varphi_{n,m}$$

für jedes $n \geq 1$, $m \in (n)$ und $\widetilde{n} \in (m)$. Wir identifizieren also jeden $\mathbb{C}((x^{\frac{1}{n}}))$ mit seinen Bilder via $\varphi_{n,m}$. Nun können wir die Vereinigung aller $\mathbb{C}((x^{\frac{1}{n}}))$ betrachten:

$$\mathbb{C}\langle\langle x\rangle\rangle := \bigcup_{n\geq 1} \mathbb{C}((x^{\frac{1}{n}})),$$

(also der direkte Limes des Systems $\{\mathbb{C}((x^{\frac{1}{n}})), \varphi_{n,m}\}$). Das ist in der Tat ein Körper. Er heißt der **Körper der gebrochenen Potenzreihen** in einer Unbestimmten über $\mathbb{C}$.

Wie sehen die Elemente von $\mathbb{C}\langle\langle x\rangle\rangle$ aus?

Ein Element $s \in \mathbb{C}\langle\langle x\rangle\rangle$ ist ein Element $s \in \mathbb{C}((x^{\frac{1}{n}}))$ für beliebiges $n$. D.h.,

$$s = \sum_{i=d}^{\infty} a_i (x^{\frac{1}{n}})^i = \sum_{i=d}^{\infty} a_i x^{\frac{i}{n}},$$

die letzte Reihe mit gebrochenen Exponenten und gemeinsamen Nennern. Die Reihe $s$ gehört zu allen Körpern $\mathbb{C}((x^{\frac{1}{m}}))$ für $m \in (n)$.

**Beispiel 3.1**

1. $s = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{5}{6}} + x + x^{\frac{7}{6}} + \ldots \in \mathbb{C}\langle\langle x\rangle\rangle$
2. $s' = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{5}} + \ldots \notin \mathbb{C}\langle\langle x\rangle\rangle$.

Sei $s = \sum_{i=d}^{\infty} a_i x^{\frac{i}{n}} \in \mathbb{C}\langle\langle x\rangle\rangle$. Man definiert die **Ordnung** von $s$ als

$$o(s) = \min\left\{\frac{i}{n} \mid a_i \neq 0\right\}.$$

Die Ordnung ist wohldefiniert, denn $\sum_{i=d}^{\infty} a_i x^{\frac{i}{n}} = \sum_{i=d}^{\infty} a_i x^{\frac{ir}{nr}}$, $r > 0$ und $o(s)$ hängt nicht von dem Nenner $n$ ab.

**Definition 3.1**
Eine **Puiseux Reihe** ist ein Element $s \in \mathbb{C}\langle\langle x\rangle\rangle$ mit $o(s) > 0$.

**Definition 3.2**
Gegeben sei $s \in \mathbb{C}\langle\langle x\rangle\rangle$. Die **Polydromieordnung** von $s$ ist („der kleinste gemeinsame Teiler der Exponenten von $x$ in $s$")

$$\nu(s) := \min\left\{n \mid s \in \mathbb{C}((x^{\frac{1}{n}}))\right\}.$$

Sei $n \in \mathbb{Z}$ festgelegt und betrachten wir $\mathbb{C}((x^{\frac{1}{n}}))$ als eine Erweiterung von $\mathbb{C}((x))$: Sei $\varepsilon \in \mathbb{C}$, so dass $\varepsilon^n = 1$ (die heißen die *n-ten Einheitswurzeln*). Wir können folgende Ersetzung machen:

$$x^{\frac{1}{n}} \looparrowright \varepsilon x^{\frac{1}{n}}.$$

Sie induziert einen Automorphismus $\sigma_\varepsilon$ von $\mathbb{C}((x^{\frac{1}{n}}))$ über $\mathbb{C}((x))$. Wenn $s = \sum_{i=d}^{\infty} a_i x^{\frac{i}{n}} \in \mathbb{C}((x^{\frac{1}{n}}))$, bezeichnen wir:

$$\sigma_\varepsilon(s) = \sum_{i=d}^{\infty} a_i \varepsilon^i x^{\frac{i}{n}}.$$

Man nennt $\sigma_\varepsilon(s)$ die **Konjugierte** von $s$.

Die Menge der Konjugierten von einem gegebenen $s$ ist unabhängig von dem Körper $\mathbb{C}((x^{\frac{1}{n}}))$, zu dem die Reihe $s$ gehört.

Die Konjugation von Reihen ist eine Äquivalenzrelation. Die Menge aller Konjugierten von $s$ heißt die *Konjugationsklasse* von $s$. Alle Reihen einer Konjugationsklasse haben dieselbe Ordnung und Polydromieordnung. Insbesondere sind die Konjugierten einer Puiseux Entwicklung auch Puiseux Entwicklungen.

**Lemma 3.1**

$$\sharp\left\{\sigma_\varepsilon(s) \mid \varepsilon^n = 1\right\} = \nu(s).$$

*Beweis.* Sei $s = \sum_{i=d}^{\infty} a_i x^{\frac{i}{n}}$. Nehmen wir an, dass $n = \nu(s)$. Für jeden Primteiler $m$ von $n$ existiert ein $i \geq d$ mit $a_i \neq 0$ und $m \nmid i$. Dann können wir die Indizes $i_1, \ldots i_k$ wählen, so dass $a_{i_j} \neq 0$ für $1 \leq j \leq k$, und $\mathrm{ggT}(n, i_1, \ldots, i_k) = 1$.

Seien $\eta, \varepsilon$ mit $\eta^n = \varepsilon^n = 1$ . Wenn $\sigma_\eta(s) = \sigma_\varepsilon(s)$, dann $\eta^{i_j} a_{i_j} = \varepsilon^{i_j} a_{i_j}$ und dann $\eta^{i_j} = \varepsilon^{i_j}$ für $1 \leq j \leq k$. Da $\mathrm{ggT}(n, i_1, \ldots, i_k) = 1$, daraus folgt $\eta = \varepsilon$ und dann hat $s$ genau $n = \nu(s)$ verschiedene Konjugierte. $\square$

**Beispiel 3.2**
Sei $s = x^{\frac{2}{4}} + x^{\frac{6}{4}}$. Dann $s \in \mathbb{C}((x^{\frac{1}{4}}))$ und $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = -1$, $\varepsilon_3 = i$ und $\varepsilon_4 = -i$. Daraus folgt:

1. $\sigma_{\varepsilon_1}(s) = x^{\frac{2}{4}} + x^{\frac{6}{4}}$.
2. $\sigma_{\varepsilon_2}(s) = (-x^{\frac{1}{4}})^2 + (-x^{\frac{1}{4}})^2 = x^{\frac{2}{4}} + x^{\frac{6}{4}}$.
3. $\sigma_{\varepsilon_3}(s) = i^2 x^{\frac{2}{4}} + i^6 x^{\frac{6}{4}} = -x^{\frac{2}{4}} - x^{\frac{6}{4}}$.
4. $\sigma_{\varepsilon_4}(s) = (-i)^2 x^{\frac{2}{4}} + (-i)^6 x^{\frac{6}{4}} = -x^{\frac{2}{4}} - x^{\frac{6}{4}}$.

Angenommen, dass $s \in \mathbb{C}((x^{\frac{1}{n}}))$ eine Puiseux Entwicklung ist, d.h., $o(s) > 0$. Man kann $s$ durch $y$ in $f(x,y) = \sum_{i,j \geq 0} a_{ij} x^i y^j \in \mathbb{C}[[x,y]]$ ersetzen. Dann ist $f(x,s)$ ein Element von $\mathbb{C}[[x^{\frac{1}{n}}]]$ und die Einsetzung induziert einen Morphismus von $\mathbb{C}$-Algebras

$$\mathbb{C}[[x,y]] \to \mathbb{C}[[x^{\frac{1}{n}}]].$$

*Bemerkung.* Wenn $s \in \mathbb{C}((x^{\frac{1}{n}}))$, dann $f(x,s) \in \mathbb{C}[[x^{\frac{1}{n}}]]$. Angenommen, dass $s = \sum_k a_k x^{\frac{k}{n}}$ und $f = \sum_{i,j} A_{i,j} x^i y^j$, dann

$$f(x,y) = \sum_{i,j} A_{i,j} x^i \left(\sum_k a_k x^{\frac{k}{n}}\right)^j.$$

Also der Koeffizient von $x^{\frac{d}{n}}$ ist

$$\sum_{i_1 \cdot \ldots \cdot i_j + n \cdot i = d} A_{i,j} a_{i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_j}.$$

**Beispiel 3.3**
Sei $f(x,y) = \sum_{i+j=1}^{3} x^i y^j$ und $s = 2x^{\frac{1}{2}} + 3x$. Dann:

$$f(x,s) = 2x^{\frac{1}{2}} + 8x + 22x^{\frac{3}{2}} + 28x^2 + 68x^{\frac{5}{2}} + 40x^3.$$

**Definition 3.3**
Sei $f \in \mathbb{C}[[x,y]]$. Man sagt, dass eine Puiseux Reihe $s$ eine $y$**-Wurzel** von $f$ ist, genau wenn $f(x,s) = 0$ (als Element von $\mathbb{C}[[x^{\frac{1}{n}}]]$).

**Lemma 3.2**
Eine Puiseux Reihe $s \in \mathbb{C}[[x^{\frac{1}{n}}]]$ ist eine $y$-Wurzel von $f \in \mathbb{C}[[x,y]]$ genau dann, wenn $y - s$ teilt $f$ in $\mathbb{C}[[x^{\frac{1}{n}}, y]]$.

*Beweis*. Betrachten wir den Automorphismus

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{C}[[x^{\frac{1}{n}}, y]] & \longrightarrow & \mathbb{C}[[x^{\frac{1}{n}}, y]] \\ y & \mapsto & y + s \\ g(x,y) & \mapsto & g(x, y+s) \end{array}$$

Da $\varphi(y-s) = y$ und $f(x,0) = f(x,s)$, reicht es, nur den Fall $s = 0$ zu behandeln, und er ist trivial. □

**Lemma 3.3**
Ist $s$ eine $y$-Wurzel von $f$, dann sind alle Konjugierten von $s$ auch $y$-Wurzel von $f$.

*Beweis*. Nach dem Lemma 3.2 erhalten wir $f(x,y) = (y-s)g(x,y)$ mit $g(x,y) \in \mathbb{C}[[x^{\frac{1}{n}}, y]]$. Dann erweitern wir den Automorphismus $\sigma_\varepsilon$ auf $\mathbb{C}[[x^{\frac{1}{n}}, y]]$. Wenn wir immer noch die Bezeichnung $\sigma_\varepsilon$ halten, dann erhalten wir

$$f = \sigma_\varepsilon(f) = (y - \sigma_\varepsilon(s))\sigma_\varepsilon(g)$$

und die Aussage folgt. □

**Definition 3.4**
Wenn $s \in \mathbb{C}[[x^{\frac{1}{n}}]]$ und $n = \nu(s)$, werden die verschiedenen Konjugierten von $s$ als $s^1, s^2, \ldots, s^n$ bezeichnet. Wir bilden das Polynom

$$g_s = \prod_{i=1}^{n} \left(y - s^i\right) \in \mathbb{C}[[x]][y].$$

**Lemma 3.4**
Eine Puiseux Reihe $s \in \mathbb{C}[[x^{\frac{1}{n}}]]$ ist eine $y$-Wurzel von $f$ genau dann, wenn $g_s$ teilt $f$ in $\mathbb{C}[[x,y]]$.

*Beweis*. Da die Umkehrung trivial ist, nehmen wir an, dass $f(x,s) = 0$. Wir wenden Induktion über die Anzahl $\nu$ von verschiedenen Konjugierten von $s$. Falls $\nu = 1$, folgt die Aussage aus dem Lemma 3.2. Falls $i \leq \nu$, dann muss $s^{i+1}$ eine $y$-Wurzel von $f_i$ sein, so dass das Lemma 3.2 eine neue Gleichung $f = (y - s^1) \cdot \ldots \cdot (y - s^{i+1}) f_{i+1}$ gibt, und auch schließlich noch eine Gleichung

$$f = (y - s^1) \cdot \ldots \cdot (y - s^\nu) f_\nu = g_s f_\nu$$

wobei $g_s$ der Definition 3.4 entspricht. Aber $f$ und $g_s$ sind invariant unter Konjugierung, dann ist $f_\nu$ auch so, d.h., $f_\nu \in \mathbb{C}[[x,y]]$. □

**Lemma 3.5**
Die Reihe $g_s$ ist irreduzibel in $\mathbb{C}[[x,y]]$.

*Beweis.* Angenommen, dass $g_s = f_1 \cdot f_2$. Dann muss $s$ eine $y$-Wurzel von mindestens ein $f_i$ sein, sagen wir von $f_1$. Nach dem Lemma 3.4 teilt das Polynom $g_s$ das Polynom $f_1$, d.h., $f_2$ ist invertierbar. Wiederspruch. □

Dann wird klar, dass die Suche nach der Parametrisierung von $f$ genau die Suche nach den $y$-Wurzeln von $f$ ist.

## 3.2 Das Newton Polygon

Wir betrachten eine Ebene $\pi = \mathbb{R}^2$ zusammen mit einem orthogonalen Koordinatensystem $\{\alpha, \beta\}$, wobei $\alpha$ bzw. $\beta$ die horizontale bzw. vertikale Achse bezeichnet. Sei $f(x,y) = \sum_{\alpha,\beta>0} A_{\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta \in \mathbb{C}[[x,y]]$. Wir können alle Paare $(\alpha, \beta)$ mit $A_{\alpha,\beta} \neq 0$ auf $\pi$ aufzeichnen, was den *Träger* der Potenzreihe $f$ definiert:

$$\mathrm{Tr}(f) := \left\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^2 \mid A_{\alpha,\beta} \neq 0\right\},$$

und zwar als Menge von Gitterpunkten in der Ebene $\pi$ verwendet.

Zur Definition des Newton-Polygons von $f$ betrachten wir die untere konvexe Hülle von $\mathrm{Tr}(f)$ in $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Sie entsteht durch Anlegen von Stützgeraden mit Steigung $\leq 0$ von unten (in der Anordnung von $\mathbb{R}$). Der Rand dieser Hülle enthält eine kompakte Streckung, diese heißt **Newton Polygon** von $f$. Sie wird als $\mathbf{N}(f)$ bezeichnet.

Im Allgemeinen besteht sie aus endlich vielen Strecken mit negativen rationalen Steigungen. Sie kann aber auch zu einem einzigen Punkt entarten, etwa dann, wenn $f$ eine Einheit ist (d.h., $A_{0,0} \neq 0$).

Wir definieren auch die Höhe $h(\mathbf{N}(f))$ von $\mathbf{N}(f)$ als die maximale Anordnung seiner Scheitel.

*Bemerkung.* Die Höhe $h(\mathbf{N})$ ist additiv, d.h., für $f_1, f_2 \in \mathbb{C}[[x,y]]$, dann $h(\mathbf{N}(f_1 f_2)) = h(\mathbf{N}(f_1)) + h(\mathbf{N}(f_2))$.

**Beispiel 3.4**
Sei $f(x,y) = y^4 - x^2y^2 - 2x^4y^2 + x^4y + x^5y + x^7$. Der Träger von $f$ ist

$$\mathrm{Tr}(f) = \{(0,4),(2,2),(4,2),(4,1),(5,1),(7,0)\}.$$

Die Anordnungen der Scheitel von $\mathbf{N}(f)$ sind $4,2,1,0$, also $h(\mathbf{N}(f)) = 4$.

*Bemerkung.* $\mathbf{N}(f)$ startet (bzw. endet) auf der $\beta$-Achsen (bzw. $\alpha$-Achsen) genau dann, wenn $f$ keinen Faktor $x$ hat (bzw. keinen Faktor $y$).

Sei $f(x,y) \in \mathbb{C}[[x,y]]$. Sei $\beta_0$ die minimale Höhe von einer Strecke $\Gamma$ von $\mathbf{N}(f)$. Betrachten wir das Polynom

$$F_\Gamma(Z) := \sum_{(\alpha,\beta)\in\Gamma} A_{\alpha,\beta} Z^{\beta-\beta_0} \in \mathbb{C}[Z],$$

mit von Null verschieden konstantem Term und positivem Grad gleich der Höhe von $\Gamma$. Es wird normalerweise die assoziierte Gleichung mit $\Gamma$ genannt.

Falls $s(x) = ax^{\frac{m}{n}} + \dots$ eine $y$-Wurzel von $f$ ist, dann gilt $F_\Gamma(a) = 0$. Außerdem $F_\Gamma \in \mathbb{C}[Z^n]$ und $\varepsilon a$ ist eine Wurzel von $F_\Gamma$ für jede $n$-te Einheitswurzel $\varepsilon$, und beide Wurzeln $a, \varepsilon a$ haben die gleiche Multiplizität. Diese Wurzeln heißen *konjugiert*.

Ein besonderer Fall, wenn $\mathbf{N}(f)$ aus einem einzigen Punkt $(\alpha_0, \beta_0)$ besteht. Wenn es $(\alpha, \beta)$ gibt, so dass $A_{\alpha,\beta} \neq 0$, dann $\alpha \geq \alpha_0$ und $\beta \geq \beta_0$ und so

$$f(x,y) = x^{\alpha_0} y^{\beta_0} \sum_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta} x^{\alpha-\alpha_0} y^{\beta-\beta_0}.$$

Daraus folgt der nächste Satz:

**Proposition 3.1**
Sei $f \in \mathbb{C}[[x,y]] \setminus \mathbb{C}$ und $\mathbf{N}(f)$ das Newton Polygon von $f$. Dann besteht $\mathbf{N}(f)$ aus einem Punkt genau dann, wenn $f = x^{\alpha_0} y^{\beta_0} g$ mit $g \in \mathbb{C}[[x,y]]$, so dass weder $x$ noch $y$ teilt $g$.

Die Höhe von $\mathbf{N}(f)$ beantwortet die Frage, ob die $y$-Wurzeln für eine gegebene Reihe $f \in \mathbb{C}[[x,y]]$ existieren. Die Antwort spiegelt sich im folgenden Resultat wieder.

**Proposition 3.2**
Sei $\mathbf{N}(f)$ das Newton Polygon von $f \in \mathbb{C}[[x,y]] \setminus \mathbb{C}$. Falls $h(\mathbf{N}(f)) = 0$, dann hat $f$ keine $y$-Wurzeln. Darüber hinaus hat $f$ die Gestalt

$$f(x,y) = x^{\alpha_0} \sum_{\alpha \geq \alpha_0, \beta \geq 0} A_{\alpha,\beta} x^{\alpha-\alpha_0} y^{\beta}$$

wobei $(\alpha, 0)$ der einzige Punkt aus $\mathbf{N}(f)$ ist.

## 3.3 Suche nach $y$-Wurzeln

Von nun an sind wir daran interessiert, sowohl eine eindeutige Formel für die $y$-Wurzeln abzuleiten, als auch einen beschreibenden Algorithmus dafür zu finden.

Sei $f(x,y) = \sum_{\alpha,\beta \geq 0} A_{\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta \in \mathbb{C}[[x,y]] \setminus \mathbb{C}$ und $s$ eine $y$-Wurzel von $f$. Schreiben wir $s$ als:

$$s = ax^{m/n} + \text{ Terme hoeherer Ordnung}$$

mit $a \neq 0$ (d.h. $\frac{m}{n} = \operatorname{ord}(s)$) und $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $\operatorname{ggT}(m,n) = 1$.

Wir müssen jetzt die Terme möglichst kleiner Ordnung in $f(x,s)$ suchen. Dafür setzen wir $s$ in $f$ ein:

$$\begin{aligned} 0 &= f(x,s) \\ &= \sum_{\alpha,\beta \geq 0} A_{\alpha,\beta} x^\alpha \left(ax^{\frac{m}{n}} + \dots\right)^\beta \\ &= \sum_{\alpha,\beta \geq 0} A_{\alpha,\beta} a^\beta x^{\alpha + \beta\frac{m}{n}} \end{aligned}$$

Also sind die Terme von möglichst kleiner Ordnung jene mit einer Ordnung

$$\min\left\{\alpha+\beta\frac{m}{n} \mid A_{\alpha,\beta}\neq 0\right\}.$$

Sei $\frac{d}{n}$ diese gesuchte Ordnung. Die Terme von $f$ vom Grad $\frac{d}{n}$ sind

$$\sum_{n\alpha+m\beta=d} A_{\alpha,\beta}a^{\beta}x^{\frac{n\alpha+m\beta}{n}} = \left(\sum_{n\alpha+m\beta=d} A_{\alpha,\beta}a^{\beta}\right)x^{\frac{d}{n}}$$

Wenn $s = ax^{\frac{m}{n}} + \ldots$ eine $y$-Wurzel ist, dann existiert eine Strecke $\Gamma$ von $\mathbf{N}(f)$ mit Steigung $-\frac{n}{m}$.

**Lemma 3.6**
Falls eine $y$-Wurzel von $f$ einen Leitterm $ax^{\frac{m}{n}}$ hat, dann gibt es eine Strecke $\Gamma$ von $\mathbf{N}(f)$ mit der Steigung $-\frac{n}{m}$ und $a$ ist eine Wurzel der assoziierten Gleichung mit $\Gamma$.

*Beweis*. Seien $s = ax^{\frac{m}{n}} + \ldots$ wobei $a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, und $f(x,y) = \sum_{\alpha,\beta\geq 0} A_{\alpha,\beta}x^{\alpha}y^{\beta}$. Es ist $f(x,s) = 0$ in $\mathbb{C}[[x^{\frac{1}{n}}]]$. Insbesondere muss der Term niedrigster Ordnung in dieser Reihe verschwinden. Um ihn zu bestimmen, kann man $s$ durch $ax^{\frac{m}{n}}$ ersetzen. Es ist:

$$\begin{aligned} f(x,ax^{\frac{m}{n}}) &= \sum_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}x^{\alpha}a^{\beta}x^{\beta\frac{m}{n}} \\ &= \sum_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}a^{\beta}x^{\alpha+\beta\frac{m}{n}} \\ &= x^{\frac{d}{n}} \sum_{n\alpha+m\beta=d} A_{\alpha,\beta}a^{\beta} + \ldots \end{aligned}$$

wobei $d := \min\{n\alpha+m\beta \mid A_{\alpha,\beta}\in \mathrm{Tr}(f)\}$. Also ist $a$ die Nullstelle des Polynoms

$$F(a) := \sum_{n\alpha+m\beta=d} A_{\alpha,\beta}a^{\beta}.$$

Wegen $a\neq 0$ muss $F$ mindestens zwei Koeffizienten ungleich Null haben. Also gibt es auf der Geraden $n\alpha+m\beta = d$ mindestens zwei Punkte des Trägers von $f$ mit verschiedenen $\beta$.

Wegen der Minimalität von $d$ enthält diese Gerade damit eine Strecke $\Gamma$ des Newton Polygons von der Steigung $-\frac{n}{m}$. $\square$

Wir betrachten das mit $\Gamma$ assoziierte Polynom

$$F_{\Gamma}(z) = \sum_{(\alpha,\beta)\in\Gamma} A_{\alpha,\beta}z^{\beta-\beta_0} \in \mathbb{C}[z].$$

Mit seiner Hilfe berechnen wir den ersten Koeffizient $a$ der $y$-Wurzel, ist $a$ die von Null verschiedene Wurzel von $F_{\Gamma}(z)$. Wir haben also $s = x^{\frac{m}{n}}(a+s^1)$ mit $s^1 = bx^{\frac{m_1}{n_1}} + \ldots$. Dann ist

$$s = ax^{\frac{m}{n}} + bx^{\frac{m}{n}+\frac{m_1}{n_1}} + \ldots$$

Was wissen wir über $s^1$? Betrachten wir die Ersetzung $x = x_1^n$ und $y = x_1^m(a+y_1)$. Dies ist sinvoll, denn $\mathbb{C}\langle\langle x\rangle\rangle \subseteq \mathbb{C}\langle\langle x_1\rangle\rangle$ mit $x_1 = x^{1/n}$. Wir haben also folgende Formel:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_1^n, x_1^m(a+y_1)) \\ &= \sum_{\alpha,\beta\geq 0} A_{\alpha,\beta} x_1^{n\alpha}\left(x_1^m(a+y_1)\right)^\beta \\ &= \sum_{\alpha,\beta\geq 0} A_{\alpha,\beta} x_1^{n\alpha+m\beta}(a+y_1)^\beta \end{aligned}$$

Wenn die Strecke $\Gamma$ die Gleichung $nx+my=d$ hat, dann $A_{\alpha,\beta}\neq 0$ mit $n\alpha+m\beta\geq d$ für alle $\alpha,\beta$. Daraus folgt, dass $f(x,y) = x_1^d f_1(x_1,y_1)$, wobei $f_1\in\mathbb{C}[[x_1,y_1]]$ mit

$$f_1(x_1,y_1) = \sum_{\alpha,\beta\geq 0} x_1^{n\alpha+m\beta-d}(a+y_1)^\beta.$$

Wir setzen $s^1$ in $f_1$ ein:

$$\begin{aligned} f_1(x_1,s^1) &= x_1^{-d} f(x_1^n, x_1^m(a+s^1)) \\ &= x^{-\frac{d}{n}} f(x, x^{\frac{m}{n}}(a+s^1)) \\ &= x^{-\frac{d}{n}} f(x,s). \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $f(x,s)=0$ genau dann, wenn $f_1(x_1,s^1)=0$, d.h., $s$ ist eine $y$-Wurzel von $f$ genau dann, wenn $s^1$ eine $y_1$-Wurzel von $f_1$ ist. Also falls $s^1\neq 0$, dann

$$s^1 = bx^{\frac{m_1}{n_1}} + \dots$$

wobei $-\frac{n_1}{m_1}$ die Steigung der Strecke $\Gamma_1$ von $\mathbf{N}(f_1)$ ist und $b$ die Wurzel des Polynoms $F_{\Gamma_1}(z)$ ist.

Wenn wir einmal den ersten Term von $s^1$ berechnet haben, setzen wir ihn in $s$ ein:

$$\begin{aligned} s &= x^{\frac{m}{n}}(a+s^1) \\ &= x^{\frac{m}{n}}(a+bx_1^{\frac{m_1}{n_1}} + \dots) \\ &= x^{\frac{m}{n}}(a+bx_1^{\frac{m_1}{n\cdot n_1}} + \dots). \end{aligned}$$

Dann kann man diesen Prozess wiederholen, um die $y$-Wurzel zu erhalten. Er ist aber offensichtlich unendlich und muss beenden werden, außer in einigen Fällen.

**Beispiel 3.5**
Sei $f(x,y) = y^2 - x^3$. Wir suchen nach den $y$-Wurzeln von $f$. Die 0 ist keine $y$-Wurzel, denn $f(x,0) = -x^3 \neq 0$. Das Newton-Polygon von $f$ besteht also aus einer Strecke mit Scheiteln $(3,0)$ und $(0,2)$. Das bedeutet:

$$\begin{aligned} 0 &= f(x,s) \\ &= (ax^{\frac{m}{n}} + \dots)^2 - x^3 \\ &= a^2x^{2\frac{m}{n}} + (\text{ Ordnung groeer als } 2\frac{m}{n}) - x^3 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Der Term mit kleinster Ordnung ist:

- $a^2x^{2\frac{m}{n}}$, wenn $2\frac{m}{n} < 3$.
- $-x^3$, falls $2\frac{m}{n} > 3$.
- $a^2x^{2\frac{m}{n}} - x^3$, falls $2\frac{m}{n} = 3$.

Nehmen wir an, dass $2m/n = 3$. Dann $(a^2-1)x^3 = 0$, also $a^2-1=0$, daraus folgt, dass $a$ eine Wurzel von

$$F_\Gamma(z) = A_{0,2}z^2 + A_{3,0}z^0 = z^2 - 1$$

ist. D.h., entweder $a = 1$ oder $a = -1$. Falls $a = 1$, dann $\frac{m}{n} = \frac{3}{2}$ (da sie Koprim sind), also $m = 3$ und $n = 2$. Ersetzen wir $x$ durch $x_1^2$ und $y$ durch $x_1^3(1-y_1)$. So erhalten wir:

$$\begin{aligned} y^2 - x^3 &= x^6(1+y_1)^2 - x_1^6 \\ &= x_1^6\left((1+y_1)^2 - 1\right). \end{aligned}$$

Es ist also $f_1(x_1,y_1) = y_1^2 + 2y_1$, und die $y_1$-Wurzel von $f_1$ sind theoretisch $s^1 = 0$ und $s^2 = -2$. Die letzte ist aber keine Wurzel, weil sie nicht positiv ist. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} s &= x^{\frac{3}{2}}(1+s^1) \\ &= x^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Falls $a = -1$, kann man dasselbe wiederholen, und man bekommt $s = -x^{\frac{3}{2}}$.

## 3.4 Der Newton-Puiseux Algorithmus. Der Puiseux Satz

Angenommen, dass $h(\mathbf{N}(f)) = 0$, dann hat $f$ keine $y$-Wurzeln, und man kann einen induktiven Algorithmus bilden (den so genannten *Newton-Puiseux Algorithmus*), welcher alle $y$-Wurzeln von $f$ enthält.

Nehmen wir an, dass $h(\mathbf{N}(f)) > 0$.

- ***Schritt*** (0):

  Da $h(\mathbf{N}(f)) > 0$, folgt, dass $\mathbf{N}(f)$ entweder über der $\alpha$-Achse endet oder es mindestens eine Strecke hat. Wir starten mit der Bestimmung einer $y$-Wurzel $s = s^{(0)}$ von $f$ und zwar mit der Durchführung einer der folgenden zwei Schritte (wenigstens einer von ihnen ist immer möglich):

  (0.a) Falls $\mathbf{N}(f)$ über der $\alpha$-Achse endet, nimmt es $s^{(0)} = 0$ an, und der Algorithmus endet hier, oder

  (0.b) man wählt eine Strecke $\Gamma$ von $\mathbf{N}(f)$, wenn es sie gibt, und eine Wurzel $a$ von $F_\Gamma$. Nehmen wir an, dass $\Gamma$ eine Gleichung $n\alpha + m\beta = d$ mit $(n,m) = 1$ hat. Wir führen zwei freie Unbestimmte $x_1, y_1$ ein und machen folgende Identifizierung: $\mathbb{C}\langle\langle x\rangle\rangle = \mathbb{C}\langle\langle x_1\rangle\rangle$ und $\mathbb{C}((x,y))$ mit einem Unterkörper von $\mathbb{C}((x_1,y_1))$ mit Hilfe der Bedingungen

$$\begin{aligned} x &= x_1^n \\ y &= x_1^m(a+y_1). \end{aligned}$$

Dann erhalten wir:

$$f = \sum_{n\alpha+m\beta\geq d} A_{\alpha,\beta}x^\alpha y^\beta = x_1^d\left(\sum_{n\alpha+m\beta\geq d} A_{\alpha,\beta}x_1^{n\alpha+m\beta-d}(a+y_1)^\beta\right)$$

so dass wir definieren können $f_1 = x_1^{-d}f \in \mathbb{C}[[x_1,y_1]]$. Wir nehmen (als $y$-Wurzel von $f$):

$$s^{(0)} = x^{\frac{m}{n}}(a+s^{(1)})$$

wobei $s^{(1)}$ als ein Element von $\mathbb{C}\langle\langle x_1\rangle\rangle$ zu bestimmen ist.

Wenn der Schritt $(0.a)$ gewählt wurde, erhalten wir direkt $s = s^{(0)} = 0$. Wenn der Schritt $(0.b)$ ausgeführt wurde, führen wir den Schritt $(1)$ aus, der besteht aus der Bestimmung des Leittermes von $s^{(1)}$ aus $x_1, y_1$ und $f_1$, die in gleicher Weise durchgeführt wird, und so weiter.

- ***Schritt*** $i-1 \rightarrow$ ***Schritt*** $i$.

Wir nehmen außerdem an, dass $h(\mathbf{N}(f)) > 0$. Dann haben wir:

$$\begin{aligned} s^{(0)} &= x^{\frac{m}{n}}\left(a + x_1^{\frac{m_1}{n_1}}\left(a_1 + \ldots + x_{i-1}^{\frac{m_{i-1}}{n_{i-1}}}(a_{i-1}+s^{(i)})\ldots\right)\right) \\ &= x^{\frac{m}{n}}\left(a + x^{\frac{m_1}{n_1}}\left(a_1 + \ldots + x^{\frac{m_{i-1}}{n\cdot\ldots\cdot n_{i-1}}}(a_{i-1}+s^{(i)})\ldots\right)\right) \end{aligned}$$

und der Schritt $(i)$ wird wie folgt dargestellt:

- ***Schritt*** $(i)$:

(i.a) nehmen wir $s^{(i)} = 0$, nur wenn $\mathbf{N}(f_i)$ über der $\alpha$-Achse endet, und der Algorithmus hier gestoppt wird; oder

(i.b) falls es eine Strecke $\Gamma_i$ von $\mathbf{N}(f_i)$ gibt, nehmen wir:

$$s^{(i)} = x^{\frac{m_i}{n_i}}\left(a_i + s^{(i+1)}\right)$$

wobei $-\frac{n_i}{m_i}$ die Steigung ist, von einer Strecke $\Gamma_i$ von $\mathbf{N}(f_i)$ mit einer Gleichung $n_i\alpha + m_i\beta = d_i$ und $\mathrm{ggT}(n_i,m_i) = 1$, und der Wert $a_i$ ist eine Wurzel des Polynoms $F_{\Gamma_i}$.

Wir wollen $s^{(i+1)}$ bestimmen. Dafür machen wir folgende Einsetzung:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{i+1}^{n_i} \\ y_i &= x_{i+1}^{m_i}(a_i + y_{i+1}), \end{aligned}$$

und $f_{i+1} = x_{i+1}^{-d_i}f_i \in \mathbb{C}[[x_{i+1},y_{i+1}]]$, nach einer Berechnung genauso wie am Ende des Schrittes $(0.b)$.

*Bemekung 1.* Es lohnt sich anzumerken, dass es viele Wege zur Fortsetzung des Newton-Puiseux Algorithmus für jeden Schritt $(i)$ gibt, entweder weil beide Möglichkeiten $(i.a)$ und $(i.b)$ gewählt werden können, oder weil man nach der Wahl $(i.b)$ immer noch die Strecke $\Gamma$ des Newton Polygons und die Wurzel $a$ von $F_\Gamma$ wählen kann.

*Bemerkung 2.* Nach dem Schritt $(i.b)$ wurden alle Terme vom Grad

$$\frac{m}{n} + \ldots + \frac{m_i}{n \cdot \ldots \cdot n_i}$$

in $x$ von der vorherausgesagenden Lösung $s^{(0)}$ bestimmt. Nach dem Schritt $(i.a)$ hingegen wurde die ganze Reihe $s^{(0)}$ bestimmt.

Das nächste Lemma zeigt im Besonderen dass immer gilt $h(\mathbf{N}(f_i)) > 0$, so dass entweder der Newton-Puiseux Algorithmus in dem Schritt $(i.a)$ endet, oder er unendlich weiter läuft.

**Lemma 3.7**
Die Notationen werden beibehalten. Für jedes $i \geq 0$ ist die Höhe $h(\mathbf{N}(f_{i+1}))$ gleich der Multiplizität von $a_i$ als eine Wurzel von $F_{\Gamma_i}$.

*Beweis.* Wir betrachten den Fall $i = 0$ (die Anderen könnten genauso behandelt werden). Nach der Definition:

$$f_1 = \sum_{n\alpha+m\beta\geq d} A_{\alpha,\beta} x_1^{n\alpha+m\beta-d}(a+y_1)^\beta$$

so dass

$$\begin{aligned} f_1(0,y_1) &= \sum_{(\alpha,\beta)\in\Gamma} A_{\alpha,\beta}(a+y_1)^\beta \\ &= (a+y_1)^{\overline{\beta}} F_\Gamma(a+y) \end{aligned}$$

wobei $\overline{\beta}$ die Anordnung des Endes von $\Gamma$ ist. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} h(N(f_1)) &= o_{y_1}(f_1(0,y_1)) \\ &= o_{y_1}(F_\Gamma(a+y_1)). \end{aligned}$$

□

**Korollar 3.1**
Die Reihen, die durch den Newton-Puiseux Algorithmus entstehen, sind Puiseux Entwicklungen.

**Beispiel 3.6**
Wir nehmen die Reihe $f(x,y) = y^3 - x^5 \in \mathbb{C}[[x,y]]$. Ihr Newton Polygon besteht nur aus einer Strecke $\Gamma$ mit der Steigung $-\frac{3}{5}$ (und den Halbachsen). Die assoziierte Gleichung mit $\Gamma$ ist $F_\Gamma(Z) = Z^3 - 1$, und sie hat die drei Wurzeln $1, \xi, \xi^2$. Wählen wir $a = 1$. Dann setzen wir gleich:

$$\begin{aligned} f_1(x_1,y_1) &= \tfrac{1}{x_1^{15}} f\big(x_1^3, x_1^5(1+y_1)\big) \\ &= \tfrac{1}{x_1^{15}} f\big(x_1^{15}(1+y_1)^3 - x_1^{15}\big) \\ &= 3y_1 + 3y_1^2 + y_1^3 \in \mathbb{C}[[x_1,y_1]]. \end{aligned}$$

Im Besonderen sehen wir, dass $\mathbf{N}(f)$ nicht die $x_1$-Achse erreicht, und wir erhalten

$$s^{(0)} = x^{\frac{5}{3}}\left(1+s^{(1)}\right) = x^{\frac{5}{3}}.$$

Wir stellen fest, dass wir die zwei anderen Lösungen $\xi x^{\frac{5}{3}}, \xi^2 x^{\frac{5}{3}}$ erreicht hätten, wenn wir $a=\xi$ oder $a=\xi^2$ gewählt hätten.

**Beispiel 3.7**
Sei $f(x,y) = y^3 - x^5 - 3x^4y - x^7 \in \mathbb{C}[[x,y]]$. Das Newton Polygon von $f$ ist das Gleiche wie im vorangegangenen Beispiel. Dann erhalten wir wie vorher:

$$\begin{aligned} f_1(x_1,y_1) &= \tfrac{1}{x_1^{15}} f\left(x_1^3, x_1^5(1+y_1)\right) \\ &= \tfrac{1}{x_1^{15}} f\left(x_1^{15}(1+y_1)^3 - x_1^{15} - 3x_1^{17}(1+y_1) - x_1^{21}\right) \\ &= 3y_1 + 3y_1^2 + y_1^3 - 3x_1^2 - 3x_1^2y_1 - x_1^6. \end{aligned}$$

Aber nun hat $\mathbf{N}(f_1)$ eine Strecke $\Gamma_1$ mit der Steigung $-\frac{1}{2}$, also müssen wir den Algorithmus wiederholen. Wir finden folgende assoziierte Gleichung mit $\Gamma_1$:

$$F_{\Gamma_1}(Z) := 3Z - 1,$$

die nur die Wurzel $a=1$ hat. Dann setzen wir ein:

$$\begin{aligned} f_2(x_2,y_2) &= \tfrac{1}{x_2^2} f^{(1)}\left(x_2, x_2^2(1+y_2)\right) \\ &= 3y_2 + 3x_2^2(1+y_2)^2 + x_2^4(1+y_2)^3 - 3x_2^2(1+y_2) - x_2^4 \\ &= 3y_2 + 3x_2^2y_2 + 3x_2^2y_2^2 + 3x_2^4y_2 + 3x_2^4y_2^2 + x_2^4y_2^3. \end{aligned}$$

Das Newton Polygon $\mathbf{N}(f_2)$ reicht nicht an die $x_2$-Achse, also $s^{(2)} := 0$, und wir können daraus schließen:

$$s^{(0)} = x^{\frac{5}{3}}\left(1 + x_1^2(1+s^{(2)})\right) = x^{\frac{5}{3}}(1+x^{\frac{2}{3}}) = x^{\frac{5}{3}} + x^{\frac{7}{3}}.$$

**Beispiel 3.8**
Berechnen wir die $y$-Wurzeln des Polynoms

$$f(x,y) = y^4 - 2x^3y^2 - 4x^5y + x^6 - y^7.$$

Es ist also $N(f) = \{(6,0),(3,2),(0,4)\}$.

Schritt 0:

$(0.a)$ Das Polygon besteht nur aus einer Strecke, die nicht über der $\alpha$-Achse endet, wir können also diesen Schritt nicht anwenden.

$(0.b)$ Die Strecke hat die Steigung $-\frac{2}{3}$ und ist auf der Geraden $y = -\frac{2}{3} + 4x$ enthalten. Daraus folgt, dass $n=2$, $m=3$ und $d=12$. Bemerken wir, dass $\mathrm{ggT}(n,m) = \mathrm{ggT}(2,3) = 1$. Wir suchen die Wurzel des folgenden Polynoms:

$$F_\Gamma(z) = z^4 + (-2)z^2 + z^0 = (z^2-1)^2.$$

Seine Wurzeln sind $a=1$ und $a=-1$ (mit Multiplizität 2). Wählen wir $a=1$ aus, dann erhalten wir die $y$-Wurzel:

$$s = x^{\frac{3}{2}}(1+s^1).$$

Wir wenden nun die Einsetzung $x = x_1^2$, $y = x_1^3(1+y_1)$ an, und wir haben die Gleichung:

$$f(x,y) = x_1^{12} f_1(x_1,y_1),$$

wobei

$$f_1(x_1,y_1) = y_1^4 + 4y_1^3 + 4y_1^2 - 4x_1y_1 - x_1^2 - 4x_1 + 1.$$

Schritt 1

Wir können nur dem Schritt $(1.b)$ wie vorher folgen. In diesem Falle haben wir $N(f_1) = \{(1,0),(0,4)\}$, also auch eine einzige Strecke mit der Steigung $-\frac{2}{1} = -2$. Daraus folgt $n = 2$, $m = 1$ und $d_1 = 2$. Die auf dieser Strecke enthaltende Gerade hat die Gleichung $y = -2x+2$. Dann müssen wir die Wurzeln folgendes Polynoms berechnen:

$$F_{\Gamma_1}(z) = 4z^2 - 4.$$

Seine Wurzeln sind $a = 1, a = -1$. Wählen wir $a = 1$ aus, so dass

$$\begin{aligned} s &= x^{\frac{3}{2}}(1+s^1) \\ s^1 &= x_1^{\frac{1}{2}}(1+s_2) \\ &= x^{\frac{1}{4}}(1+s^2). \end{aligned}$$

Ersetzen wir $s^1$ durch $s$:

$$s = x^{\frac{3}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}(1+s^2)\right).$$

Wenn wir $x_1 = x_2^2$ und $y_1 = x_2(1+y_2)$ einsetzen erhalten wir:

$$f_2(x_2,y_2) = x_2^{-2} f_1\left(x_2^2, x_2(1+y_2)\right).$$

Schritt 2

Nun reicht es, wenn wir den Schritt $(2.a)$ darstellen. Dann erhalten wir $s^2 = 0$ und so:

$$\begin{aligned} s &= x^{\frac{3}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right) \\ &= x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{7}{4}}. \end{aligned}$$

Falls $s$ eine $y$-Wurzel von $f$ ist, sind alle Konjugierten von $s$ auch $y$-Wurzeln. Da $h(N(f)) = 4$, dann erhalten wir vier Einheitswurzeln, nämlich $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = -1$, $\varepsilon_3 = i$ und $\varepsilon_4 = -i$. Dann sind folgende Reihen $y$-Wurzeln von $f$:

- $\sigma_{\varepsilon_1}(s) = x^{\frac{6}{4}} + x^{\frac{7}{4}}$.
- $\sigma_{\varepsilon_2}(s) = (-1)^6 x^{\frac{6}{4}} + (-1)^7 x^{\frac{7}{4}} = x^{\frac{6}{4}} - x^{\frac{7}{4}}$.
- $\sigma_{\varepsilon_3}(s) = (i)^6 x^{\frac{6}{4}} + (i)^7 x^{\frac{7}{4}} = -x^{\frac{6}{4}} - ix^{\frac{7}{4}}$.
- $\sigma_{\varepsilon_4}(s) = (-i)^6 x^{\frac{6}{4}} + (-i)^7 x^{\frac{7}{4}} = -x^{\frac{6}{4}} + ix^{\frac{7}{4}}$.

Die Polydromieordnungen steigen nicht immer ein, d.h., $s = s^{(0)} \in \mathbb{C}\langle\langle x\rangle\rangle$.

**Lemma 3.8**
Es existiert ein $i_0 \in \mathbb{Z}$ so dass $n_i = 1$ falls $i > i_0$.

**Korollar 3.2**
Sei $f \in \mathbb{C}[[x,y]]$. Die Reihen $s$, die von dem an $f$ angewandte Newton-Puiseux Algorithmus folgen, sind Puiseux Reihen und tatsächlich $y$-Wurzeln von $f$, d.h., $f(x,s) = 0$.

**Satz 3.1 (Puiseux)**
Falls $f \in \mathbb{C}[[x,y]]$ und $h(\mathbf{N}(f)) > 0$, dann gibt es eine Puiseux Reihe $s$, welche eine $y$-Wurzel von $f$ ist, d.h. $f(x,s(x)) = 0$.

Drei Folgerungen aus dem Satz sind:

- Für jedes $f \in \mathbb{C}[[x,y]]$ existieren Puiseux Entwicklungen $s_1,\ldots,s_m$, $m \geq 0$, so dass $f$ zerfällt einzig als
$$f = ux^r g_{s_1} \cdot \ldots \cdot g_{s_m},$$
wobei $r$ eine nicht negative ganze Zahl ist, $u \in \mathbb{C}[[x,y]]$ ist eine Einheit und $g_s = \prod_{i=1}^{\nu(s)}(y - s^i)$, mit $s^i$ eine Konjugierte $s$.
- $\mathbb{C}[[x,y]]$ ist faktoriell.
- Weierstraßscher Vorbereitungssatz: Wenn $f(x,y)$ regulär in $y$ mit der Ordnung $n$ (i.e., $o(f(0,y)) = n$) ist, dann existiert eine Einheit $u \in \mathbb{C}[[x,y]]$ und ein Weierstraßpolynom $g(x,y)$ so dass $f = ug$. Zur Erinnerung: eine Weierstraßpolynom $g(x,y)$ vom Grad $n$ ist ein Polynom in $\mathbb{C}[[x]][y]$ in der Gestalt von
$$g(x,y) = y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots + a_0(x),$$
mit $a_i(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ und $a_i(0) = 0$ für $i < n$.

**Bemerkung 3.1 (Konvergenz von $y$-Wurzeln)**
Wenn $f \in \mathbb{C}\{x,y\}$ konvergent ist, dann sind dies auch alle $y$-Wurzeln von $f$. Wir können also alle vorherigen Resultate bei dem Fall von konvergenten Potenzreihen anwenden.

# 4 Puiseux Parametrisierungen

**Definition 4.1**
Eine Parametrisierung $(x(t), y(t))$ heißt eine *Puiseux-Parametrisierung* wenn sie die Form

$$\begin{aligned} x(t) &= t^n \\ y(t) &= at^m + a_{m+1}t^{m+1} + \ldots \end{aligned}$$

mit $a \neq 0$ hat.

Diese Art von Parametrisierungen kann mit dem Newton-Puiseux Algorithmus erhalten werden. Wenn eine $y$-Wurzel von $f$ folgende Gestalt hat:

$$s(x) = \sum_{i \geq m} a_i x^{\frac{i}{n}}$$

dann gibt es eine Puiseux Parametrisierung der Gestalt

$$\begin{aligned} x(t) &= t^n \\ y &= \sum_{i \geq m} a_i t^i \end{aligned}$$

**Definition 4.2**
Sei $s \in \mathbb{C}\langle\langle x \rangle\rangle$, $\nu = \nu(s)$ die Polidromieordnung von $s$.

$$g_s := \prod_{\varepsilon^\nu = 1} (y - \sigma_\varepsilon(s)) \in \mathbb{C}\left(\left(x^{1/n}\right)\right)[y]$$

**Proposition 4.1**

1. $g_s \in \mathbb{C}[[x]][y]$.
2. $s$ ist eine $y$-Wurzel von $f$ genau dann, wenn $g_s$ teilt $f$ in $\mathbb{C}[[x,y]]$.
3. $g_s$ ist irreduzibel in $\mathbb{C}[[x,y]]$.

**Satz 4.1**
Sei $f \in \mathbb{C}[[x,y]]$.

1. Es gibt Puiseuxreihen $s_1, \ldots, s_m$, $m \geq 0$ und $r \geq 0$ so dass $f = ux^r g_{s_1} \cdot \ldots \cdot g_{s_m}$ mit $u$ eine Einheit in $\mathbb{C}[[x,y]]$.
2. diese Zerlegung ist eindeutig bestimmt.
3. $h(N(f)) = \nu(s_1) + \ldots + \nu(s_m)$ und die $y$-Wurzel von $f$ sind genau $s_1, \ldots, s_m$ und ihre Konjugierte.

*Beweis.* (1) und (3) werden durch Induktion nach $h(N(f))$ bewiesen. Wenn $h(N(f)) = 0$ dann $f = ux^r$ und es gibt keine $y$-Wurzeln. Wenn $h(N(f) = h > 0$, dann existiert eine $y$-Wurzel $s_1$. Daraus folgt, dass $g_{s_1} \mid f$ in $\mathbb{C}[[x,y]]$ und $f = g_{s_1} \cdot f_1$. Dann ist es $h(N(f)) = h(N(g_{s_1})) + h(N(f_1)) =$

$\nu_{s_1} + h(N(f_1))$ und so $g_s = \prod_{\varepsilon^{\nu(s_1)}=1}(y - \sigma_\varepsilon(s_1))$ und so $h(N(f_1)) < h$. Wir wenden die Induktion an und sind am Ende angelangt. Was (2) betrifft, sind die Polynome, die mit Wurzeln assoziierten Polynome und $r$ ist das Größte mit $x^r \mid f$. Darüber hinaus hängt $r$ nicht von der Zerlegung ab. Wenn $g_s$ als ein Faktor in einer zweiten Zerlegung erscheint, dann ist $s$ eine $y$-Wurzel von $f$ und dann ist $s$ eine Konjugierte einer Reihe $s_j$ (nach (1)). Daraus folgt, dass $g_s = g_{s_j}$ und danach reicht es, beide Seiten bei $g_s$ dividieren und Induktion über $m$ anwenden. □

**Korollar 4.1**
Der Ring $\mathbb{C}[[x,y]]$ ist faktoriell, da $f = ux^r g_{s_1} \cdot \ldots \cdot g_{s_m}$ die Zerlegung in irreduziblen Faktoren von $f$ in $\mathbb{C}[[x,y]]$ ist.

**Korollar 4.2**
Sei $f \in \mathbb{C}[[x,y]]$. Man kann $f$ formulieren als eine einzige Zerlegung

$$f = u \cdot x^r \cdot \prod_{i=1}^{l}(y - z_j)$$

wobei die $z_j$ Puiseuxreihen sind, $r \in \mathbb{Z}, r \geq 0$ und $u \in \mathbb{C}[[x,y]]$ eine Einheit ist. Außerdem $l = h(N(f))$ und die $z_j$ sind $y$-Wurzeln von $f$.

*Beweis.*Die Existenz ist klar. Angenommen, dass

$$f = u \cdot x^r \cdot \prod_{i=1}^{l}(y - z_j) = u' \cdot x^{r'} \cdot \prod_{i=1}^{l'}(y - z'_j).$$

Nach der oben genannten Proposition folgt, dass $r = r'$. Klar ist auch, dass die Menge aller $y$-Wurzeln von $f$ gleich sowohl $\{z_j\}_{j=1}^{l}$ als auch $\{z_j\}_{j=1}^{l'}$ ist. Wenn $h(N(f)) = 0$, dann ist die Eindeutigkeit klar (denn es gibt keine $y$-Wurzel). Wenn $h(N(f)) > 0$, sei $s$ eine $y$-Wurzel von $f$. Da alle Konjugierten von $s$ $y$-Wurzeln von $f$ sind, erscheinen alle davon zwischen den $z_j$, und auch zwischen den $z'_j$. Außerdem $g_s \mid f$ in $\mathbb{C}[[x,y]]$, und so kann man durch $g_s$ dividieren. Dann wenden wir Induktion über $h(N(f))$ an, Induktionsaussage zu $\frac{f}{g_s}$ angewandt. PP

*Achtung!* Diese Zerlegung liegt in $\mathbb{C}\langle\langle x\rangle\rangle[y]$. Die Zerlegung $f = ux^r g_{s_1} \cdot \ldots \cdot g_{s_m}$ liegt in $\mathbb{C}[[x,y]]$.

**Definition 4.3**
Sei $f \in \mathbb{C}[[x,y]]$ (oder auch $f \in \mathbb{C}[x,y]$).

1. Eine Parametrisierung von $f$ (um $(0,0)$ zentriert) ist ein Paar formaler Reihen $x(t), y(t) \in \mathbb{C}[[t]]$ mit:
   **i)** $(x(t), y(t)) \neq (0,0)$
   **ii)** $\mathrm{ord}_t(x(t)) > 0$ und $\mathrm{ord}_t(y(t)) > 0$
   **iii)** $f(x(t), y(t)) = 0$.
2. Zwei Parametrisierungen $(x,y)$ und $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ von $f$ heißen äquivalent, wenn es eine Reihe $\alpha(t) \in \mathbb{C}[[t]]$ mit $\mathrm{ord}_t \alpha(t) = 1$ gibt, mit $\widetilde{x}(t) = x(\alpha(t))$ und $\widetilde{y}(t) = y(\alpha(t))$.

   Warum $\mathrm{ord}_t(\alpha(t)) = 1$ ? Das entspricht der Idee, dass $\alpha$ ein Diffeomorphismus in einer offenen Menge von $\mathbb{C}$, die 0 enthält, sein muss. Man hat also:

$$\alpha(t) = a_1 t + a_2 t^2 + \ldots$$

wobei $a_1 = \alpha'(0) \neq 0$. Man kann auch beweisen, dass wenn $\mathrm{ord}_t(\alpha(t)) = 1$, dann existiert $\beta(t) \in \mathbb{C}[[t]]$ mit $\mathrm{ord}_t(\beta(t)) = 1$, so dass $\alpha(\beta(t)) = t$, und die Beziehung "äquivalent sein- ist eine Äquivalenzbeziehung.

3. Eine Parametrisierung heißt reduzibel, wenn sie äquivalent zu einer Parametrisierung $x(t), y(t)$ ist, so dass $x(t), y(t) \in \mathbb{C}[[t^q]]$ mit $q \geq 2$. Sonst heißt sie irreduzibel. Zum Beispiel ist die Parametrisierung $x(t) = t^2, y(t) = t^2 + t^4$ reduzibel in $\mathbb{C}[[t^2]]$ (aber auch alle ihre äquivalenten Parametrisierungen!)

**Satz 4.2**

1. Sei $(x(t), y(t))$ eine Parametrisierung mit $x(t) \neq 0$. Dann ist sie äquivalent zu einer der Art $\widetilde{x}(t) = t^n, \widetilde{y}(t) = \sum_i a_i t^i$. Sie heißen "Puiseux Parametrisierungen".
2. Eine Puiseux Parametrisierung $\widetilde{x}(t) = t^n, \widetilde{y}(t) = \sum_i a_i t^i$ ist irreduzibel genau dann, wenn $\mathrm{ggT}\{n, \{i \mid a_i \neq 0\}\} = 1$.
3. Eine irreduzible Parametrisierung mit $x(t) = 0$ ist äquivalent zu $x(t) = 0, y(t) = t$.
4. Zwei Puiseux Parametrisierungen $\widetilde{x}(t) = t^n, \widetilde{y}(t) = \sum_i a_i t^i$, $\widetilde{x}(t) = t^{n'}, \widetilde{y}(t) = \sum_i \widetilde{a}_i t^i$ sind äquivalent genau dann, wenn $n = n'$ und $\sum_i \widetilde{a}_i t^i = \sum_i a_i \varepsilon^i t^i$, wobei $\varepsilon^n = 1$.

*Beweis.*

1.) Da $x(t) \neq 0$, dann $x(t) = t^n \beta(t)$ mit $\beta(0) \neq 0$ (also $\beta$ ist eine Einheit) und $n = \mathrm{ord}_t(x(t))$. Daraus folgt, es existiert $\widetilde{\beta}(t)$, so dass $(\widetilde{\beta}(t))^n = \beta(t)$ (denn $\mathbb{C}$ hat Charakteristik 0) und man kann schreiben

$$x(t) = (t \cdot \widetilde{\beta}(t))^n = (\gamma(t))^n$$

mit $\mathrm{ord}_t(\gamma(t)) = 1$. Dann existiert ein $\alpha(t)$ mit $\mathrm{ord}_t(\alpha(t)) = 1$ so dass $\gamma(\alpha(t)) = t$. Man kann also schreiben $\widetilde{x}(t) = x(\alpha(t)) = (\gamma(\alpha(t)))^n = t^n$ und $\widetilde{y}(t) = y(\alpha(t)) = \sum_i a_i t^i$.

2.) Sei $x(t) = t^n, y(t) = \sum_i a_i t^i$ eine Puiseux Parametrisierung. Angenommen, dass ein $q \in \mathbb{Z}$ existiert, so dass $q \mid n$ und $q \mid i$ für alle $i$ mit $a_i \neq 0$, dann erhalten wir

$$x(t) = (t^q)^{\frac{n}{q}}$$

$$y(t) = \sum_i a_i (t^q)^{\frac{i}{q}}$$

Wenn die Parametrisierung $(x(t), y(t))$ reduzibel ist, dann muss $q = 1$ sein. Umgekehrt, angenommen, es existiert ein $\alpha(t)$ so dass $x(\alpha(t)), y(\alpha(t)) \in \mathbb{C}[[t^q]]$, mit $q \geq 2$ (i.e., die Parametrisierung ist reduzibel). Dann kann man schreiben

$$\alpha(t) = t \cdot \widetilde{\alpha}(t)$$

wobei $\widetilde{\alpha}(t) = \alpha_0 + \alpha_1(t) + \ldots$ mit $\alpha_0 \neq 0$.

- Der Ausdruck

  $$x(\alpha(t)) = (\alpha(t))^n = t^n(\alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots)^n$$

  gehört zu $\mathbb{C}[[t^q]]$ genau dann, wenn alle Exponenten Vielfache von $q$ sind; d.h., $q \mid n$. Außerdem $(\alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots)^n \in \mathbb{C}[[t^q]]$. Daraus folgt, dass

  $$\alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots \in \mathbb{C}[[t^q]] \tag{4.1}$$

- Ebenfalls erhalten wir

$$y(\alpha(t)) = \sum_i a_i \alpha(t)^i = \sum_i a_i t^i (\underbrace{\alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots}_{\in \mathbb{C}[[t^q]]})^i \in \mathbb{C}[[t^q]].$$

Daraus folgt, dass:

$$\text{wenn } a_i \neq 0 \;\; \Rightarrow \;\; q \mid i. \tag{4.2}$$

Beweis von 4.1: Durch Widerspruch. Wenn das nicht gilt, existiert ein $s$ Minimum mit $\alpha_s \neq 0$ und $q \nmid s$. Wie sieht dann der Koeffizient von $t^s$ in $(\underbrace{\alpha_0}_{\neq 0} + \alpha_1 t + \ldots)^n$ aus? Er muss geich 0 sein, denn $s$ ist kein Vielfach von $q$ und die Exponenten der Koeffizienten von $(\alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots)^n$ sind alle Vielfache von $q$. Also:

$$0 = t^s = \sum_{i_1 + \ldots + i_n = s} \alpha_{i_1} \cdot \ldots \cdot \alpha_{i_n} = (*)$$

Es geht nun darum, alle möglichen Summen $i_1 + \ldots + i_n = s$ zu betrachten. Nach einer Bestätigung kann man herausfinden, dass $n\alpha_0^{n-1}\alpha_s$ das einzige Element ist, und keins mehr (sie würden kleineren Elementen entsprechen). Für alle $j$ $i_j \neq s$, also $i_j < s$ und $q \mid i_j$, dann $q \mid s$ gilt nicht. Wir erhalten:

$$(*) = n\alpha_0^{n-1}\alpha_s.$$

Da $\alpha_0 \neq 0$, $\alpha_s \neq 0$ und $n \neq 0$, aber die Charakteristik von $\mathbb{C}$ gleich 0 ist, finden wir einen Widerspruch. Also $\alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots \in \mathbb{C}[[t^q]]$.

Beweis von 4.2. Durch Widerspruch. Sei $s$ der Minimumwert so dass $a_s \neq 0$ und $q \nmid s$. Dann gilt:

$$\underbrace{y(\alpha(t)) - \sum_{i<s} a_i t^i (\alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots)^i}_{\in \mathbb{C}[[t^q]]} = \sum_{i \geq s} a_i t^i (\alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots)^i.$$

Der einzige Term davon im Grad $s$ ist $a_s \alpha_0^s$, und muss 0 sein. Als in der Beweis von 6.1, finden wir einen Widerspruch.

Folglich erhalten wir, dass $\mathrm{ggT}\{n, \{i \mid a_i \neq 0\}\} > 1$.

3.) Aus $y(t) \neq 0$ folgt, dass ein $\alpha(t)$ mit der Eigenschaft $y(\alpha(t)) = t^n$ existiert. Es gilt aber auch, dass $x(\alpha(t)) = 0$. Man hat eine Parametrisierung äquivalent zu $\widetilde{x}(t) = 0, \widetilde{y}(t) = t^n$. Sie ist irreduzible und nach (2) ist $n = 1$. Also gilt $\widetilde{x}(t) = 0$ und $\widetilde{y}(t) = t$.

4.) Angenommen, dass $x(t) = t^n, y(t) = \sum_i a_i t^i$ und $\widetilde{x}(t) = t^{n'}$ und $\widetilde{y}(t) = \widetilde{a}_i t^i$ äquivalente Parametrisierungen sind. Daraus folgt, dass $\alpha(t) = t\widetilde{\alpha}(t)$ mit $\widetilde{\alpha}_0 \neq 0$ und $\mathrm{ord}_t(\alpha(t)) = 1$ existiert, so dass $\widetilde{x}(t) = x(\alpha(t))$. Das heißt:

$$t^{n'} = \alpha(t)^n = t^n(\widetilde{\alpha}(t))^n$$

mit $\widetilde{\alpha}_0 \neq 0$. Daraus folgt, dass $n = n'$ und $(\widetilde{\alpha}(t))^n = 1$, und bei unbestimmten Koeffizienten kann man zeigen, dass $\widetilde{\alpha}(t) = \varepsilon \in \mathbb{C}$ mit $\varepsilon^n = 1$. $\square$

**Satz 4.3**
Sei $f = u \cdot u^r \cdot g_{s_1} \cdot \ldots \cdot g_{s_m} \in \mathbb{C}[[x,y]]$. Daraus folgt:

1. Eine irreduzible Parametrisierung mit $x(t) = 0$ ist eine Parametrisierung von $f$ genau dann, wenn $r > 0$.
2. Eine Parametrisierung $x(t) = t^n, y(t) = \sum_i a_i t^i$ ist eine Parametrisierung von $f$ genau dann, wenn $s = \sum_i a_i x^{\frac{i}{n}}$ eine $y$-Wurzel von $f$ ist. Außerdem ist sie irreduzibel genau dann, wenn $n = \nu(s)$.
3. Es existiert eine 1 zu 1 Beziehung zwischen der Menge aller Klassen von irreduziblen Parametrisierungen (modulo "Äqúivalenz") mit $x(t) \neq 0$ und $\{g_{s_1}, \ldots, g_{s_m}\}$.

*Bemerkung*. Sei $\{x,y\}$ eine Parametrisierung von $f$. Alle äquivalenten Parametrisierungen sind auch Parametrisierungen von $f$: $f(x(t),y(t)) = 0 \Rightarrow f(x(\alpha(t)), y(\alpha(t))) = 0$.
*Beweis*.
1.) $(x(t) = 0, y(t) = t)$ ist auch eine Parametrisierung von $f$, also $f(0,t) = 0$ und $x \mid f$.

2.) $(x(t) = t^n, y(t) = \sum_i a_i t^i)$ ist eine Parametrisierung von $f$ genau dann, wenn $f\left(t^n, \sum_i a_i t^i\right) = 0$, d.h., genau wenn $f\left(x, \sum_i a_i x^{\frac{i}{n}}\right) = 0$. Die Parametrisierung ist irreduzibel genau dann, wenn $\mathrm{ggT}(n,i) = 1$, also wenn die Polidromieordnung $\nu(\sum_i a_i x^{\frac{i}{n}}) = n$.

3.) Sei die Menge aller Parametrisierungen mit $x \neq 0$ modulo die Relation "äquivalent zu sein". Zwei Elemente $[(t^n, \sum_i a_i t^i)]$, $[(t^n, \sum_i \widetilde{a}_i t^i)]$ gleichen sich genau dann, wenn $\widetilde{a}_i = a_i \varepsilon_i$, mit $\varepsilon^n = 1$. Die Klasse $[(t^n, \sum_i a_i t^i)]$ entspricht einer Reihe $\sum a_i x^{\frac{i}{n}}$, und die Klasse $[(t^n, \sum_i \widetilde{a}_i t^i)]$ entspricht der Reihe

$$\sum \widetilde{a}_i x^{\frac{i}{n}} = \sum a_i \varepsilon^i x^{\frac{i}{n}} = \sigma_\varepsilon(s).$$

Beide haben dassselbe $g_s$. Dann gilt die Beziehung:

$$[(t^n, \sum_i a_i t^i)] \longrightarrow g_s$$

mit $s = \sum a_i x^{\frac{i}{n}}$. Umgekehrt gilt auch, für $s = \sum_i a_i x^{\frac{i}{n}}$ und $n = \nu(s)$:

$$[(t^n, \sum_i a_i t^i)] \longleftarrow g_s.$$

□

**Definition 4.4**
Sei $f \in \mathbb{C}[[x,y]]$. Jede irreduzible Komponente von $f$ in $\mathbb{C}[[x,y]]$ heißt ein Zweig von $f$ in $(0,0)$.

Sei $f = u \cdot x^r \cdot g_{s_1} \cdot \ldots \cdot g_{s_m}$. Die Zweige von $f$ in $(0,0)$ sind $x$ wenn $r > 0$ (dem entspricht eine Parametrisierung $x = 0, y = t$), und $g_{s_1}, \ldots, g_{s_m}$, mit $s_j = \sum_{i>0} a_{ij} x^{\frac{i}{n_j}}$, $n_j = \nu(s_j)$ (und jedem $g_{s_j}$ entspricht irreduzible Parametrisierungen der Gestalt $x = t^{n_j}, y = \sum_{i>0} a_{ij} t^i$ für $1 \leq j \leq m$).

Sei $s = a_m x^{\frac{m}{n}} + a_{m+1} x^{\frac{m+1}{n}} + \ldots$ eine Puiseux Reihe mit $a_m \neq 0$ und $\frac{m}{n} > 0$. Sei $n = \nu(s)$. Man kann schreiben

$$g_s = \prod_{\varepsilon^n = 1} (y - \sigma_\varepsilon(s)) \in \mathbb{C}[[x]][y].$$

**Satz 4.4**
Sei $a = a_m$, $d = \mathrm{ggT}(m,n)$, $m' = \frac{m}{d}$ und $n' = \frac{n}{d}$. Dann:

$$g_s = \left(y^{n'-a^{n'}}x^{m'}\right)^d + \sum_{n\alpha+m\beta>nm} A_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta.$$

*Bemerkung*. Die Terme niedrigsten Grades von $g_s$ liegen in der Monomie $(y^{n'} - a^{n'}x^{m'})^d$.

*Bemerkung*. Ein Monom von $(y^{n'} - a^{n'}x^{m'})^d$ hat die Gestalt

$$\frac{d}{i}(-a^{n'})^i x^{im'} y^{n'(d-i)}$$

Wenn $\alpha = im'$ und $\beta = n'(d-i)$ gilt:

$$n\alpha + m\beta = im'n + n'(d-i)m = din'm' + dn'm'(d-i) = d^2m'n' = mn.$$

Also, wenn $g_s = \sum_{n\alpha+m\beta\geq nm} A_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta$, dann ist es:

$$(y^{n'} - a^{n'}x^{m'})^d = \sum_{n\alpha+m\beta=nm} A_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta$$

*Beweis*. Die $y$-Wurzeln von $g_s$ sind $s$ und ihre Konjugierten. Alle diese haben denselben Exponent, denn $N(g_s)$ besteht aus einer einzigen Strecke $\Gamma$, mit der Steigung $-\frac{n}{m} = -\frac{n'}{m'}$. Also:

$$g_s = \prod_{n-\text{Faktoren}} (y - \sigma_\varepsilon(s)) = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \ldots$$

wobei $a_1(x) = -\sum \sigma_\varepsilon(s)$. Dass heißt, in $N(g_s)$ erscheint $(0,n)$. Und da auch gilt

$$a_n(x) = (-1)^n \prod \sigma_\varepsilon(s) = (-1)^n \prod_i (a\varepsilon_i^m x^{\frac{m}{n}} + \ldots) = (-1)^n a^n (\prod \varepsilon_i^m) x^m + \ldots$$

daraus folgt, dass $(m,0)$ auch in $N(g_s)$ erscheint.

Wir haben schon gesehen, dass man $g_s$ wie folgt schreiben kann:

$$g_s = \sum_{n\alpha+m\beta=nm} A_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta + sum_{n\alpha+m\beta>nm} A_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta.$$

Das mit $\Gamma$ asoziierte Polynom $F_\Gamma(z) = A_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta$ hat der Gestalt:

$$F_\Gamma(z) = \prod_{\varepsilon^{n'}=1} (z - a\varepsilon)^d =$$

**Definition 4.5**
Sei $f = \sum A_{\alpha\beta}x^{\alpha y^\beta} \in \mathbb{C}[[x,y]]$. Angenommen, dass $f \neq 0$, dann

$$m_{(0,0)}(f) = \mathrm{ord}(f) = \min\{\alpha + \beta \mid A_{\alpha\beta} \neq 0\}.$$

**Proposition 4.2**

1. Wenn $n > m$, daraus folgt dass $m_{(0,0)}(g_s) = m$ und die einzige Tangente ist $x = 0$.
2. Wenn $n < m$, daraus folgt dass $m_{(0,0)}(g_s) = n$ und die einzige Tangente ist $y = 0$.
3. Wenn $n = m$, daraus folgt dass $m_{(0,0)}(g_s) = m = n$ und die einzige Tangente ist $y - ax = 0$.

*Beweis*. Wir haben gesehen:

$$\begin{aligned} g_s &= \sum_{n\alpha+m\beta=nm} A_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta + \sum_{n\alpha+m\beta>nm} A_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta \\ &= (y^{n'} + a^{n'}x^{m'})^d \sum_{n\alpha+m\beta>nm} A_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta \end{aligned}$$

Wir betrachten den ersten Term. Falls $n > m$ folgt, dass $nm = n\alpha + m\beta < n(\alpha + \beta)$ wenn $\beta \neq 0$ und folglich gilt $\alpha + \beta > m$. Wenn $\beta = 0$, dann ist $nm = n\alpha$ und so $\alpha = m$. Daraus folgt:

$$\begin{cases} \alpha + \beta > m, & \text{wenn } \beta \neq 0 \\ \alpha + \beta = m, & \text{wenn } \beta = 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

Es ist klar, dass

$$\min\{\alpha + \beta \mid A_{\alpha\beta} \neq 0\} = m$$

und es gibt ein einziges Monom vom Grad $m$, dem der Scheitel $(m, 0)$ des Newton Polygons entspricht. Die Tangente ist also $x = 0$.

Falls $n < m$ haben wir zwei Möglichkeiten: Entweder ist $\alpha \neq 0$ (und $A_{\alpha\beta} \neq 0$) und dann

$$nm \leq n\alpha + m\beta < m(\alpha + \beta),$$

also

$$n < (\alpha + \beta) = \deg(x^\alpha + y^\beta);$$

oder ist $\alpha = 0$ und dann

$$nm \leq n\alpha + m\beta = m\beta,$$

also $\beta = \deg x^\alpha y^\beta \geq n$. Es gibt dann doch Monomen, die dem Grad $n$ entsprechen, und zwar nur eins: In $g_s$ gibt es $y^n$ (entsprechender Term dem Scheitel $(0, n)$. Man hat also $m_{(0,0)}(g_s) = n$. Darüber hinaus wird Grad $n$ nur in $y^n$ erreicht, dann gibt es nur eine einzige Tangente mit der Gleichung $y = 0$.

Falls $n = m$, gilt $n\alpha + m\beta = n(\alpha + \beta) = m(\alpha + \beta)$ und dann:

- Wenn $nm < n\alpha + m\beta = n(\alpha + \beta)$, daraus folgt $m < \alpha + \beta = \deg x^\alpha + y^\beta$.
- Wenn $nm = n\alpha + m\beta = n(\alpha + \beta)$, daraus folgt $m = \alpha + \beta = \deg x^\alpha + y^\beta$.

Also $m_{(0,0)}(g_s) = m = n$ und die Monomen vom Grad $m$ (oder $n$) sind die Monomen von $\Gamma$, d.h., die Monomen mit $n\alpha + m\beta = nm$, d.h., diese Monomen, die in $(y^{n'} - a^{n'}x^{m'})$ erscheinen. Da in diesem Fall gilt $n' = m' = 1$ und $d = n = m$, daraus folgt, dass

$$(y^{n'} - a^{n'}x^{m'}) = (y - ax)^n$$

und die einzige Tangente hat zwar die Gleichung $y - ax = 0$. PP

**Korollar 4.3**

1. Wenn die Steigung von $\Gamma$ kleiner als $-1$ ist, dann $m_{(0,0)}(g_s) = m$ und die Tagente ist $x = 0$.
2. Wenn die Steigung von $\Gamma$ größer als $-1$ ist, dann $m_{(0,0)}(g_s) = n$ und die Tagente ist $y = 0$.
3. Wenn die Steigung von $\Gamma$ gleich $-1$ ist, dann $m_{(0,0)}(g_s) = m = n$ und die Tagente ist $y - ax = 0$.

**Proposition 4.3**
Sei $f \in \mathbb{C}[[x,y]]$. Jede Strecke des Newton Polygons $N(f)$ mit einer Steigung grösser als $-1$ (bzw. kleiner als $-1$, bzw. glecih $-1$) liefert mindestens einen Zweig, der Tangent zu der Achse $x$ (bzw. der Achse $y$, bzw. keiner Achse) ist.

*Beweis*. Jede Strecke des Newton Polygons mit einer Steigung $-\frac{n}{m}$ liefert eine Puiseuxreihe der Gestalt

$$s = ax^{\frac{m}{n}} + \dots$$

Diese Reihen $s$ sind auch tangenten zu den Zweigen $g_s$. Der Satz folgt nun direkt aus dem Korollar 4.3.PP

**Korollar 4.4**
Wenn $\gamma$ ein irreduzibler Kurvenkeim ist, und eine seiner Puiseuxreihen $s$ hat einen Leitterm $ax^{\frac{m}{n}}$, mit $n = \nu(s)$, dann ist die Multiplizität von $\gamma$

$$e(\gamma) = \min\{m,n\}.$$

Das heißt, $e(\gamma) = n = \nu(s)$ genau dann, wenn $m \geq n$ und es gilt:

**Korollar 4.5**
Ein irreduzibler Keim $\gamma$ ist nicht tangent zur $y$-Achse genau dann, wenn $e(\gamma)$ der Polydromieordnung seiner Puiseuxreihe gleicht.

**Korollar 4.6**
Die Polydromieordnung einer Puiseuxreihe eines irreduziblen Keimes $\gamma$ hängt nicht von der Wahl des Koordinatensystems ab, solange die $y$-Achse nicht tangent zu dem Zweig ist.

# 5 Hamburger-Nöther Entwicklungen

Seien $S$ eine Fläche, $O$ ein Punkt in $S$ und $\xi$ ein Kurvenkeim mit lokalem ring $\mathcal{O}_\xi$. Wir werden andere algebraische Methode, um die Parametrisierung einer Kurvensingularität zu präsentieren. Sie ist anwendbar auf beliebige Charakteristik, trotzdem wird $\mathbb{C}$ für uns immer noch der Grundkörper sein.

**Definition 5.1**
Ein **Parametrisierungssystem** besteht aus zwei formalen Potenzreihen $\{x,y\}$ mit

$$x = x(u)$$

$$y = y(u)$$

in $\mathbb{C}[[u]]$, so dass $o(x) > 0$ und $o(y) > 0$.

**Beispiel 5.1**
Sei $\{y_1, y_2\}$ ein Erzeugendensystem des maximalen Ideals $\mathfrak{m}_\xi$ von $\mathcal{O}_\xi$. Jedes $y_i$ kann als eine formale Potenzreihe in einem Unbestimmten $t$ von positiver Ordnung gesehen werden, d.h.:

$$y_i = y_i(t), \text{ mit } \operatorname{ord}_t(y_i) > 0, \ i = 1,2. \tag{5.1}$$

Eine solche Menge $\{y_1, y_2\}$ ist ein Parametrisierungssystem.

**Bemerkung 5.1**
Gegebene sei eine Menge wie in (5.1), dann existiert ein Keim, der diese Gleichungen als lokale parametrische Darstellung besitzt. Es genügt, folgenden Ringhomomorphismus zu betrachten:

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{C}[[x,y]] & \longrightarrow & \mathbb{C}[[t]] \\ & x & \mapsto & y_1(t) \\ & y & \mapsto & y_2(t), \end{array}$$

wo der Kernel von $f$ ein Primideal $\mathfrak{p} \subset \mathbb{C}[[x,y]]$ ist. Der Keim ist also bei dem Quotientenring Ring $\mathbb{C}[[x,y]]/\mathfrak{p}$ gegeben.

Betrachten wir ein Parametrisierungssystem $\{x,y\}$ und nehmen wir an, dass $\operatorname{ord}_t(x) \leq \operatorname{ord}_t(y)$. Wir wenden sukzessive Divisionen in $\mathbb{C}[[t]]$ wie folgt an.

- Dividieren $y$ durch $x$: $\frac{y}{x}$, un nehmen wir den unabhängiger Term von $\frac{y}{x}$ weg, sagen wir $a_{0,1} \in \mathbb{C}$. Man erhält eine Reihe $y_1 := \frac{y}{x} - a_{0,1}$, mit $\operatorname{ord}_t(y_1) > 0$. Daraus folgt $y = a_{0,1}x + xy_1$.
- Dividieren $y_1$ durch $x$: $\frac{y_1}{x}$. Es gibt zwei Möglichkeiten:

i) $\mathrm{ord}_t(y_1) \geq \mathrm{ord}_t(x) > 0$: nehmen wir den unabhängigen Term von $\frac{y_1}{x}$ weg , sagen wir $a_{0,2} \in \mathbb{C}$. Man bekommt eine Reihe $y_2 := \frac{y_1}{x} - a_{0,2}$ mit $\mathrm{ord}_t(y_2) > 0$. Daraus folgt:

$$y = a_{0,1}x + x(a_{0,2}x + xy_2) = a_{0,1}x + a_{0,2}x^2 + x^2 y_2. \tag{5.2}$$

ii) $\mathrm{ord}_t(y_1) < \mathrm{ord}_t(x)$: wir unterbrechen den Algorithmus und erhalten

$$y = a_{0,1} + a_{0,2}x^2 + \ldots$$

Das ist der Fall $\mathrm{ord}_t(y) = \mathrm{ord}_t(x)$.

- Dividieren $y_2$ durch $x$: $\frac{y_2}{x}$, und wir machen wie oben weiter. Wir haben den Fall ii) nur wenn $\mathrm{ord}_t(y) = 2 \cdot \mathrm{ord}_t(x)$.

Die partielle Reihenentwicklung (5.2) für $y$ geht weiter, bis man eine Ausdruck der Gestalt $y_{h_0+1} := z_1$ erhält:

$$y = a_{0,1}x + a_{0,2}x^2 + \ldots + a_{0,h_0}x^{h_0} + x^{h_0}z_1, \tag{5.3}$$

mit $\mathrm{ord}_t(z_1) > 0$, $0 < \mathrm{ord}_t(z_1) < \mathrm{ord}_t(x)$. Die Anwendung des Euklidischen Algorithmus ermöglicht es: $\mathrm{ord}_t(y) = q \cdot \mathrm{ord}_t(x) + r$, $0 < r < \mathrm{ord}_t(x)$. In einem solchen Ausdruck merkt man, dass $q = h_0$ und $r = \mathrm{ord}_t(z_1)$. Falls $r = 0$ gilt Falls ii).

Wenn wir ein solches $z_1$ erhalten (und die Entwicklungszeile (5.2), die $y$ entspricht, ist also komplett), wir setzen das Parametrisierungssystem durch $\{z_1, x\}$, mit $\mathrm{ord}_t(z_1) < \mathrm{ord}_t(x)$, und der Prozess start wieder. Dann hat man eine ähnliche Zeile zu (5.2):

$$x = a_{1,2}z_1^2 + \ldots + a_{1,h_1}z_1^{h_1} + z_1^{h_1}z_2,$$

mit $0 < \mathrm{ord}_t(z_2) < \mathrm{ord}_t(z_1) < \mathrm{ord}_t(x) \leq \mathrm{ord}_t(y)$ (man bemerkt, dass $a_{1,1} = 0$, denn nun gilt $\mathrm{ord}_t(z_1) < \mathrm{ord}_t(x)$, d.h., eine *strikte* Ungleichung). Ansonst wird der Algorithmus gestoppt.

Dieser Prozess geht weiter, bis der Erscheinung eines Zeile der Art (5.3). Er stoppt nach endlich viele Schritte (d.h., nach endlich viele Zeilen der Art (5.3)), denn die Sequenz $\mathrm{ord}_t(z_j)$ fällt ab, und sie sind alle positive ganze Zahlen.

Man erhält also eine Menge von Gelichungen (D):

$$\begin{array}{lcl}
y & = & a_{0,1}x + a_{0,2}x^2 + \ldots + a_{0,h_0}x^{h_0} + x^{h_0}z_1 \\
x & = & a_{1,2}z_1^2 + a_{1,3}z_1^3 + \ldots + a_{1,h_1}z_1^{h_1} + z_1^{h_1}z_2 \\
\ldots & & \ldots \\
z_{r-2} & = & a_{r-1,2}z_{r-1}^2 + a_{r-1,3}z_{r-1}^3 + \ldots + a_{r-1,h_{r-1}}z_{r-1}^{h_{r-1}} + z_{r-1}^{h_{r-1}}z_r \\
z_{r-1} & = & a_{r,2}z_r^2 + \ldots
\end{array}$$

where

- $a_{j,i} \in \mathbb{C}$
- $z_j \in \mathbb{C}[[t]]$, $1 \leq \mathrm{ord}_t(z_r) < \ldots < \mathrm{ord}_t(z_1) < \mathrm{ord}_t(x) \leq \mathrm{ord}_t(y)$

- $a_{j,1} = 0$, denn $\mathrm{ord}_t(z_{j-1}) > \mathrm{ord}_t(z_j)$, for $1 \leq j \leq r$.

**Definition 5.2**
Eine Parametrisierung von Ausdrücken der Gestalt (D) heißt eine **Hamburger-Nöthersche Entwicklung** für das System $\{x, y\}$.

**Bemerkung 5.2**

(a) Mann kann (D) in einem geschlossenen Weg beschreiben, mit Hilfe der Gleichung

$$z_{j-1} = \sum_i a_{ji} z_j^i + z_j^{h_j} z_{j+1}$$

zusammen mit den vernünftigen Einschränkungen auf $j$ und $a_{ji}$ und mit der Setzung $z_0 = x$, $z_{-1} = y$.

(b) Eine Hamburger-Nöthersche Entwicklung für $\{x, y\}$ gibt eine parametrische Darstellung eines Kurvenkeimes, mit der Parameter $z_r$:

$$\begin{cases} x = x(z_r) \\ y = y(z_r). \end{cases}$$

**Proposition 5.1**
Die Hamburger-Nöthersche Entwicklung eines Systems $\{x, y\}$ mit $\mathrm{ord}_t(x) \leq \mathrm{ord}_t(y)$ ist durch die folgenden Bedingungen eindeutig bestimmt:

1. $a_{ji} \in \mathbb{C}$.
2. $z_j \in \mathbb{C}[[t]]$.
3. $1 \leq \mathrm{ord}_t(z_r) < \ldots < \mathrm{ord}_t(z_1) < \mathrm{ord}_t(x)$.

Insbesondere hängt die Entwicklung nur von dem System (und von dem auf ihn fixierten Element) ab, wenn $\mathrm{ord}_t(x) = \mathrm{ord}_t(y)$; sie hängt aber von dem lokalen Parameter $t$ nicht ab.

*Beweis.*
Sei $(D)$ eine Hamburger-Nöthersche Entwicklung. Man definiert die mit $(D)$ asoziierte Zahl $L((D)) := h_0 + h_1 + \ldots + h_{r-1}$. Für jedes System $\{x, y\}$ setzt man:

$$L(\{x, y\}) := \min \{L((D)) \mid (D) \text{ ist eine Entwicklung fuer } \{x, y\}\}.$$

Wir wollen den Satz durch Induktion über $L(\{x, y\})$ beweisen.

Ersten, falls $L(\{x, y\}) = 0$, dann existiert irgendwelche Entwicklung $(D)$ für $\{x, y\}$ von der Art $y = a_{0,1}x + a_{0,2}x^2 + \ldots$. Für eine andere Entwicklung $(D')$ gilt eine der folgenden Statements:

(A) $y = a'_{0,1}x + a'_{0,2}x^2 + \ldots + a'_{0,h}x^h + x^h z_1$, $1 \leq \mathrm{ord}_t(z_1) < \mathrm{ord}_t(x)$.

(B) $y = a'_{0,1}x + a'_{0,2}x^2 + \ldots$

Im Fall (A), wenn man substraihert $(D) - (D')$, hat man der Gleichung:

$$\sum_{i=1}^{h} (a_{0,1} - a'_{0,i})x^i = \left( \sum_{i>h} a_i x^i \right) - x^h z_1.$$

Das ist aber ein Widerspruch, denn beide Seiten der Gleichung sind Reihen in $t$ mit verschiedenen Ordnungen.

Im Fall (B), wenn $q$ die Erste ganze Zahl mit $a_{0,q} \neq a'_{0,q}$ bezeichnet, dann gilt

$$\sum_{i \geq q} (a_{0,1} - a'_{0,i}) x^i = 0$$

dass ein Widerspruch ist.

Sei nun $\{x, y\}$ ein Parameterssystem so dass $L(\{x, y\}) = N > 0$, und nehmen wir an, dass die Aussage für jedes System mit $L(\{x', y'\}) < N$ gilt. Wir möchten zeigen, dass sie für das System $\{x, y\}$ auch gilt.

Betrachten wir eine Entwicklung $(D)$ für $\{x, y\}$ mit $L((D)) = N$ und sei $(D')$ eine andere Entwicklung für $\{x, y\}$. Das bedeutet, dass $a_{0,1} = a'_{0,1}$, nur mit dem Vergleich $\frac{y}{x} = a_{0,1} + a_{0,2}x + \ldots + a_{0,h}x^{h-1} + x^{h-1}z_1$ zu $\frac{y'}{x} = a'_{0,1} + a'_{0,2}x + \ldots + a'_{0,h}x^{h-1} + x^{h-1}z_1$. Es gilt:

$$y_1 = (y - a_{0,1}x)\frac{1}{x} = (y - a'_{0,1}x)\frac{1}{x} = y'_1.$$

Das System $\{x, y_1\}$ hat tatsächlich zwei Entwicklungen $(D_1)$ und $(D'_1)$, wenn man der erste Term weg nimmt. Man wird sehen: $L((D_1)) = L((D)) - 1 = N - 1$. Es gilt $y = a_{0,1}x + a_{0,2}x^2 + \ldots + a_{0,h}x^h + x^h z_1$, und so $L((D)) = h_{r-1} + \ldots + h_1 + h$. Auf der anderen Seite , da $xy_1 = y - a_{0,1}x = y - a'_{0,1}x = xy'_1$, daraus folgt, dass

$$y_1 = \frac{y - a_{0,1}x}{x} = \frac{y}{x} - a_{0,1} = -a_{0,1} + a_{0,1} + a_{0,2}x + \ldots + a_{0,h}x^{h-1} + x^{h-1}z_1,$$

und so $L((D_1)) = h_{r-1} + \ldots + h_1 + h - 1$. Es gilt also $L((D_1)) = L((D)) - 1$.

Denn $L((D_1)) = L((D)) - 1 = N - 1 < N$, wendet man die Induktionsvoraussetzung and und erhält man, dass $(D_1) = (D'_1)$. Da $a_{0,1} = a'_{0,1}$, daraus folgt, dass $(D) = (D')$. PP

# 6 Aufblasungen und Invarianten

## 6.1 Auflösung von Singularitäten

**Definition 6.1**
Die **Aufblasung** $\mathrm{Bl}_0\mathbb{C}^2$ von $\mathbb{C}^2$ auf $(0,0)$ ist die folgende Untermenge von $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$:

$$\mathrm{Bl}_0\mathbb{C}^2 := \{(p,\ell) \mid p \in \ell\}$$

wobei $p$ ein Punkt von $\mathbb{C}^2$ ist, und $\ell$ eine Gerade, die durch den Ursprung geht.

Es gibt eine natürliche Abbildung $\pi : \mathrm{Bl}_0\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ so dass $(p,\ell) \mapsto p$. Jene heißt die **Aufblasungsabbildung** von $(0,0) \in \mathbb{C}^2$.

**Bemerkung 6.1**
Die Aufblasung trennt die verschiedenen Geraden, die durch den Ursprung gehen.

**Definition 6.2**
Das Urbild $E := \pi^{-1}((0,0)) \in \mathrm{Bl}_0\mathbb{C}^2$ heißt der **Ausnahmedivisor** von $\pi$.

Sei $\{x,y\}$ ein Koordinatensystem in $(0,0)$. Seien $(u:v)$ homogene Koordinaten der projektiven Gerade $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. Nach der Definition von $\mathrm{Bl}_0\mathbb{C}^2$:

$$(x,y) \in \ell \Longleftrightarrow (x,y) \in \lambda(u,v),\ \lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \Longleftrightarrow xv = yu.$$

Dann $\mathrm{Bl}_0\mathbb{C}^2 = \{(x,y,u:v) \mid xv - yu = 0\} \subseteq \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

**Bemerkung 6.2**
Man kann $\mathrm{Bl}_0\mathbb{C}^2$ mit zwei Karten bedecken. Wenn $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = U_1 \cup U_2$ mit $U_1 = \{(1:v) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}\}$ und $U_2 = \{(u:1) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}\}$ , dann haben wir die erste Karte:

$$\mathrm{Bl}_0\mathbb{C}^2 \cap (\mathbb{C}^2 \times U_1) = \{(x,xv,1:v) \mid x,v \in \mathbb{C}\} \cong \mathbb{C}^2$$

mit Koordinaten $(x,v)$, und die zweite Karte:

$$\mathrm{Bl}_0\mathbb{C}^2 \cap (\mathbb{C}^2 \times U_2) = \{(yu,y,u:1) \mid y,u \in \mathbb{C}\} \cong \mathbb{C}^2$$

mit Koordinaten $(y,u)$.

**Definition 6.3**
Sei $\xi = \xi_0$ ein Kurvenkeim von 0. Der Abschluss $\xi^{(1)}$ von $\pi^{-1}(\xi \setminus \{0\})$ heißt die **strikte Transformierte** von $\xi$. Auch bezeichnen wir als $\xi^{(1)}$ den Kurvenkeim $(\xi^{(1)},p)$, wobei $p$ der Schnittpunkt von $\xi^{(1)}$ und $E$ ist. Das Urbild $\pi^{-1}(\xi)$ heißt die **totale Transformierte** von $\xi$.

Von nun an betrachten wir die strikten Transformierten von singulären Kurvenkeimen. Wir werden immer eine Karte von $\mathrm{Bl}_0\mathbb{C}^2$ auswählen, die alle Schnitt- punkte mit dem Ausnahmedivisor enthält.

**Definition 6.4**
Sei $\xi$ ein irreduzibler singulärer Kurvenkeim. Betrachten wir die folgende Sequenz von Aufblasungen:

$$X_k \xrightarrow{\pi_k} X_{k-1} \xrightarrow{\pi_{k-1}} \ldots \longrightarrow X_2 \xrightarrow{\pi_2} X_1 \xrightarrow{\pi_1} X_0 = \xi.$$

mit $X_1 := \mathrm{Bl}_0\mathbb{C}^2$, $X_i$ die Aufblasung eines singulären Punktes $p_{i-1} \in X_{i-1}$, $E^{(i)} := (\pi_1 \circ \ldots \circ \pi_i)^{-1}((0,0))$ und die strikte Transformierte $\xi^{(i)}$ als der Abschluss von $(\pi_1 \circ \ldots \circ \pi_i)^{-1}(\xi \setminus \{0\})$. Als $\xi^{(i)}$ bezeichnen wir auch den Keim $(\xi^{(i)}, p_i)$, wobei $p_i$ der Schnittpunkt von $\xi^{(i)}$ und $E^{(i)}$ ist. Die Komposition $\pi := \pi_1 \circ \ldots \circ \pi_k$ der o.g. Aufblasungen heißt eine **Standardauflösung** von $\xi$ wenn: entweder der Keim $\xi$ glatt ist und $k = 0$, oder für $i = 2, \ldots, k$ gilt, entweder

1. $\xi^{(i-1)} \subset X_{i-1}$ hat einen singulären Punkt, und $\pi_i$ ist die Aufblasung von $X_{i-1}$ in diesem Punkt; oder
2. $\xi^{(i-1)}$ ist glatt, aber $E^{(i-1)}$ und $\xi^{(i-1)}$ schneiden sich auf $X_{i-1}$ nicht transversal; oder
3. $\xi^{(i-1)}$ ist glatt, $\xi^{(i-1)}$ und $E^{(i-1)}$ schneiden sich transversal aber $\xi^{(i-1)}$ schneidet auch mehr als eine Komponente von $E^{(i-1)}$;

und außerdem ist der Keim $\xi^{(k)}$ glatt, $\xi^{(k)}$ und $E^{(k)}$ schneiden sich transversal und $\xi^{(k)}$ schneidet nur eine einzige Komponente von $E^{(k)}$.

**Satz 6.1**
Sei $\xi$ ein irreduzibler singulärer Kurvenkeim. Dann existiert immer eine Standardauflösung von $\xi$.

## 6.2 Invarianten von Singularitäten

Wir interessieren uns für eine topologische Klassifikation der Kurvenkeime, d.h., wir möchten qualitative lokale Eigenschaften von solchen Keimen (bis zum topologischen Äquivalenz) bestimmen.

**Definition 6.5**
Seien $\xi_0, \xi_0'$ zwei Kurvenkeime in 0 definiert. Der Keim $\xi_0$ heißt *topologisch äquivalent* zu $\xi_o'$ (und man wird als $\xi_0' \sim_{\mathrm{top}}$ bezeichnet) wenn existieren:

- offene Umgebungen $U, V$ von 0
- ein Homeomorphismus $\Psi : U \to V$
- Repräsentanten $\xi_1$ und $\xi_1'$ von $\xi_0$ bzw. $\xi_0'$

so dass $\Psi(\xi_1 \cap U) = \xi_1' \cap V$.

**Definition 6.6**
Eine *topologische Invariante* ist eine Abbildung $i$ von der Menge aller Kurvenkeime in 0 zu einer Menge $M$ (normalerweise gleich $\mathbb{Z}$):

$$i : \{\xi_0 : f = 0 \mid f \in \mathbb{C}[[x,y]] \setminus \mathbb{C}\} \longrightarrow M$$

so dass

$$i(\xi_0 : f = 0) = i(\zeta_0 : g = 0)$$

jedesmal wenn $\xi_0 \sim_{\mathrm{top}} \zeta_0$.

Beispiele von Invarianten sind die Wertehalbgruppe, die charakteristischen Exponenten und die Poincaréreihe.

## 6.3 Charakteristische Exponenten

Sei $s = \sum_{j>0} a_j x^{\frac{j}{n}}$ eine Puiseuxreihe. Angenommen, dass $\nu(s) = n$, d.h., $n$ und die Menge $\{i \in \mathbb{N} \mid a_i \neq 0\}$ haben keine gemeinsamen Faktoren.

Wir definieren eine endliche Menge von rationalen Zahlen $\frac{m_1}{n}, \ldots, \frac{m_k}{n}$, die sogenannten charakteristischen Exponenten, wie folgt.

$\frac{m_1}{n}$ ist der erste nicht ganze Exponent, der wirklich in $s$ erscheint; und, für alle $i$, $\frac{m_i}{n}$ ist der erste Exponent, der wirklich in $s$ erscheint, und kann nicht zum kleinsten gemeinsamen Nenner von $\frac{m_1}{n}, \ldots, \frac{m_{i-1}}{n}$ eingeschränkt werden. Mit anderen Worten:

$$m_1 = \min\{j \mid a_j \neq 0 \text{ und } j \notin (n)\}$$

und induktionsweise, wenn $n^{i-1} = \mathrm{ggT}(n, m_1, \ldots, m_{i-1}) \neq 1$,

$$m_i = \min\{j \mid a_j \neq 0 \text{ und } j \notin (n^{i-1})\}.$$

Da $n = \nu(s)$, daraus folgt, dass existiert ein $k$ so dass $n^k = 1$. Dann ist die Menge von charakteristischen Exponenten endlich:

$$\left\{\frac{m_1}{n}, \ldots, \frac{m_k}{n}\right\}.$$

*Bemerkung*. Die Menge aller characteristiken Exponenten von einer ganzer Reihe ($n = 1$) ist leer.

Nach der Definition von „charakteristischen Exponenten" kann man die Reihe $s$ wie folgt geschrieben werden:

$$s = \sum_{j \in (n) 1 \leq j < m_1} a_j x^{\frac{j}{n}} + \sum_{j \in (n') m_1 \leq j < m_2} a_j x^{\frac{j}{n}} + \ldots + \sum_{j \in (n^{k-1}) m_{k-1} \leq j < m_k} a_j x^{\frac{j}{n}} + \sum_{j \geq m_k} a_j x^{\frac{j}{n}} \tag{6.1}$$

wobei alle Koeffizienten $a_{m_i} \neq 0$. Dann können die Ordnungen von der Differenzen zwischen $s$ und ihren Konjugierten einfach berechnet werden:

**Proposition 6.1**
Für jede $n$-te Einheitswurzel $\varepsilon \neq 1$, gibt es ein $i \leq k$ mit $\mathrm{ord}_x(s - \sigma_\varepsilon(s)) \geq \frac{m_i}{n}$.

*Bemerkung*. Die Anzahl von Konjugierten von $s$ mit

$$\mathrm{ord}_x(s - \sigma_\varepsilon(s)) = \frac{m_i}{n}$$

ist genau $n^{i-1} - n^i$.

**Definition 6.7**
Sei $\xi_0$ ein irreduzibler Kurvenkeim. Sei $x(t) = t^n, y(t) = \sum_{i \geq m} a_i t^i$ mit $n > m$ eine Puiseux Parametrisierung von $\xi_0$. Setzen wir $k_0 := n$ und, für jedes $\nu \geq 1$

$$k_\nu := \min\{i \mid a_i \neq 0,\ \mathrm{ggT}(i, k_0, \ldots, k_{\nu-1}) < \mathrm{ggT}(k_0, \ldots, k_{\nu-1})\}.$$

Die Elemente der Menge $\{k_0, k_1, \ldots, k_g\}$ heißen die charakteristische Exponenten des Keimes.

*Bemerkung*.

- $k_0 < k_1 < k_2 < \ldots < k_g$.
- Da $c(\xi_0) < \infty$, dann ist es $\mathrm{ggT}(k_0, \ldots, k_g) = 1$. Daraus folgt, dass $g < \infty$.

## 6.4 Wertehalbgruppe

**Definition 6.8**
Sei $\mathscr{O}_{\xi_0} = \mathbb{C}[[x,y]]/(f)$ der lokale Ring von $\xi$ auf 0. Die mit $\xi_0$ asoziierte *Wertehalbgruppe* ist die Menge

$$\Gamma = \Gamma(\xi_0) := \left\{ v(g) \mid g \in \mathscr{O}_{\xi_0}, g \neq 0 \right\}.$$

Diese ist aber auch:

$$\begin{aligned} \Gamma(\xi_0) &= \{\mathrm{ord}_t(g(x(t), y(t))) \mid g \in \mathbb{C}[[t]], g \neq 0\} \\ &= \left\{ [\xi_0 \cdot \zeta_0] \mid \zeta_0 \text{ Keim von irred. Kurve von } g \in \mathscr{O}_{\xi_0} \right\} \end{aligned}$$

**Korollar 6.1**
Der *Führer* von $\Gamma(\xi_0)$ ist

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{f}(\xi_0) := \min\{\alpha \in \Gamma \mid \alpha + n \in \Gamma \; \forall \, n \in \mathbb{N}\}.$$

Die Wertehalbgruppe $\Gamma$ heißt *symmetrisch*, genau dann, wenn für $z \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\mathfrak{f} - 1 - z \in \Gamma \Longleftrightarrow z \notin \Gamma.$$

Das **minimale Erzeugersystem** von $\Gamma$ ist die endliche Menge $\{\beta_1, \ldots, \beta_g\}$ so dass

- $\beta_0 := \min\{a \in \Gamma \mid a \neq 0\}$
- $\beta_\nu := \{a \in \Gamma \mid \mathrm{ggT}(a, \beta_0, \ldots, \beta_{\nu-1})\} < \mathrm{ggT}(\beta_0, \ldots, \beta_{\nu-1})$ für jedes $\nu \geq 1$.

**Proposition 6.2**
Die Verbindung zwischen dem minimalen Erzeugersystem von $\Gamma$ und den charakteristischen Exponenten lautet wie folgt:

(i) $k_0 = \beta_0$.

(ii) Von den $\beta$'s bis zu den $k$'s: für $1 \leq i \leq g$ gilt

$$k_i = \beta_i - \sum_{j=1}^{i-1} \left( \frac{\mathrm{ggT}(\beta_0, \ldots, \beta_{j-1})}{\mathrm{ggT}(\beta_0, \ldots, \beta_j)} - 1 \right) \cdot \beta_j.$$

(iii) Von den $k$'s bis zu den $\beta$'s: für $1 \leq i \leq g$ gilt

$$\beta_i = k_i + \sum_{j=1}^{i-1} \left( \frac{\mathrm{ggT}(k_0, \ldots, k_{j-1})}{\mathrm{ggT}(k_0, \ldots, k_{i-1})} - \frac{\mathrm{ggT}(k_0, \ldots, k_j)}{\mathrm{ggT}(k_0, \ldots, k_{i-1})} \right) \cdot k_j.$$

**Satz 6.2**
Für jedes $\alpha \in \Gamma$ existiert eine einzige Zerlegung

$$\alpha = \alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_g\beta_g$$

mit $\alpha_0 \geq 0$ und $0 \leq \alpha_i < \frac{\mathrm{ggT}(\beta_0,\ldots,\beta_{i-1})}{\mathrm{ggT}(\beta_0,\ldots,\beta_i)}$.

**Proposition 6.3**
Sei $S$ die Wertehalbgruppe einer Kurve.

1. Wenn $u$ eine Einheit ist, dann $\underline{v}(u) = (0,\ldots,0) \in S$.
2. Für $a = (a_1,\ldots,a_r), b = (b_1,\ldots,b_r) \in S$, dann
$$\inf(a,b) = (\min(a_1,b_1),\ldots,\min(a_r,b_r)) \in S.$$
3. Für $a,b \in S$ so dass existiert ein $i_0 \in I = \{1,\ldots,r\}$ mit $a_{i_0} = b_{i_0}$, dann gibt es ein $\gamma \in S$ mit der Eigenschaft $\gamma_k \geq \min\{a_k,b_k\}$ für alle $k \in I$ und $\gamma_j = \min\{a_j,b_j\}$ wenn $a_j \neq b_j$ und $\gamma_{i_0} > a_{i_0} = b_{i_0}$.
4. Es existiert das Minimum für die Menge $S \setminus \{0\}$.
5. Die Wertehalbgruppe $S$ besitzt einen Führer.

## 6.5 Die Poincaréreihe

Sei $\xi_O : f = 0$ ein Keim irreduzibler Kurve. Sei $(x(t),y(t))$ eine Parametrisierung von $\xi_O$. Für jedes $g \in \mathbb{C}\{x,y\}$ gilt:

$$g\,(x(t),y(t)) = a \cdot t^v + \text{ Terme groessere Ordnung },\ a \neq 0.$$

Setzen wir $v(g) := v$. Falls $g\,(x(t),y(t)) \equiv 0$ setzen wir auch $v(g) := \infty$.

Betrachten wir den lokalen Ring $\mathscr{O} = \mathbb{C}\{x,y\}/(f)$. Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ definiert man:

$$J(n) := \{g \in \mathscr{O} \mid v(g) \geq n\}.$$

Diese Menge ist ein Ideal des Ringes $\mathscr{O}$. Die Ideale $J(n)$ definieren eine Filtrierung des Ringes $\mathscr{O}$, denn $J(n) \supseteq J(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Man kann also die Quotienten $J(n)/J(n+1)$ betrachten. Sie sind endlich dimensionale Vektorräume über $\mathbb{C}$. Ferner:

**Lemma 6.1**
Die Dimension von $J(n)/J(n+1)$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum ist entweder gleich 1 wenn $n \notin \Gamma(\xi_O)$, oder gleich 0 sonst.

**Definition 6.9**
Sei $\xi_O$ ein Keim irreduzibler Kurve. Man kann folgende Laurent Reihe definieren:

$$L_{\xi_O}(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \dim_{\mathbb{C}}\left(J(n)/J(n+1)\right) t^n.$$

Die mit $\xi_O$ asoziierte **Poincaréreihe** ist die Reihe:

$$P_{\xi_O}(t) := (t-1)L_{\xi_O}(t).$$

**Proposition 6.4**
Die Reihe $L_{\xi_O}(t)$ ist eine rationale Funktion.

*Beweis*. Sei $\{\beta_0,\dots,\beta_g\}$ die minimale Menge von Erzeugern der Halbgruppe $\Gamma(\xi_O)$. Sei $N_i := \frac{\gcd(\beta_0,\dots,\beta_{i-1})}{\gcd(\beta_0,\dots,\beta_i)}$, für $1 \le i \le g$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} L(\xi_O) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \dim_{\mathbb{C}} \left(J(n)/J(n+1)\right) t^n = \sum_{\alpha_0\ge 0,\ 0\le\alpha_i<N_i} t^{\alpha_0\beta_0+\alpha_1\beta_1+\ldots+\alpha_g\beta_g} = \\ &= \sum_{\alpha_0\ge 0} t^{\alpha_0\beta_0}\cdot \sum_{0\le\alpha_1<N_1} t^{\alpha_1\beta_1}\cdot\ldots\cdot \sum_{0\le\alpha_g<N_g} t^{\alpha_g\beta_g} = \frac{1}{1-t^{\beta_0}}\cdot\frac{t^{N_1\beta_1}-1}{t^{\beta_1}-1}\cdot\ldots\cdot\frac{t^{N_g\beta_g}-1}{t^{\beta_g}-1} = \\ &= \frac{\prod_{i=1}^{g}\left(1-t^{N_i\beta_i}\right)}{\prod_{i=0}^{g}\left(1-t^{\beta_i}\right)}. \end{aligned}$$

□

**Beispiel 6.1**
Wir betrachten ein Keim mit der Gleichung $f(x,y) = (y^2-x^3)^2-4x^5y-x^7$, die eine Puiseux Parametrisierung $x(t) = t^4, y(t) = t^6+t^7$ hat. Die charakteristischen Exponenten sind $k_0 = 4, k_1 = 6, k_2 = 7$. Die Wertehalbgruppe ist

$$\Gamma_{\xi_O} := \{0,4,6,8,10,12,13,14,16,17,\ldots\}$$

Das minimale Erzeugersystem besteht aus $\beta_0 = 4, \beta_1 = 6, \beta_2 = 13$. Man hat also $N_1 = \frac{\beta_0}{\gcd(\beta_0,\beta_1)} = \frac{4}{2} = 2$ und $N_2 = \frac{\gcd(\beta_0,\beta_1)}{\gcd(\beta_0,\beta_1,\beta_2)} = \frac{\gcd(4,6)}{\gcd(4,6,13)} = \frac{2}{1} = 2$. Daraus folgt:

$$L_{\xi_O}(t) = \frac{\prod_{i=1}^{2}(1-t^{N_i\beta_i})}{\prod_{i=0}^{2}(1-t^{\beta_i})} = \frac{(1-t^{12})(1-t^{26})}{(1-t^4)(1-t^6)(1-t^{13})}.$$

# Literaturverzeichnis


[C] A. Campillo: *Algebroid curves in positive characteristic*. Lecture Notes in Mathematics 518, Springer Verlag, Berlin, 1981.

[Cas] E. Casas-Alvero: *Singularities of Plane Curves*. London Math. Society, Lecture Note 276, Cambridge U.P., Cambridge, 2000.

[De-We] R. Dedekind, H. Weber: *Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen*. Journal für reine und angew. Math., 92 (1882), pp. 181-290.

[Kr] L. Kronecker: *Ueber die Discriminante algebraischer Functionen einer Variabeln*. Vorgetr. in der Sitz. der Berl. Akad. 1862, in einer Vorlesung 1870/1, publ. J. f. Math. 91 (S. 301-334), 1881.

[Hal1] G.H. Halphen: *Sur les points singuliers des courbes algébriques planes*. Mémoires prés. par divers savants à l'Ac. des Sc. de Paris, t.26, 1877.

[Hal2] G.H. Halphen: *Sur les correspondances entre les points de deux courbes*. Bull. de la Soc. math. de France, t.5, Nov. 1876.

[H] M. Hamburger: *Ueber die Entwicklung algebraischer Functionen in Reihen*. Ztschr. f. Math. u. Phys. 16 (31 S.), 1871.

[N1] M. Noether: *Ueber die algebraischen Functionen*. Note II. Gött. Nachr. v. 7. Juni 1871, S. 267.

[N2] M. Noether: *Raumcurven*, Abh. d. Berl. Akad., 1882, or J. für Math. 93.

[N3] M. Noether: *Ueber die singulären Wertsysteme einer algebraischen Function und die singulären Punkte einer algebraischen Curve*. Math. Ann. 9 (17 S.), März 1875.

[P] V. Puiseux: *Mémoire sur les fonctions algébriques*. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 15 (1850), pp.365-480.

[Sm] H. J. Stephen Smith: *On the higher singularities of plane curves*. Proceed. of the London Math. Soc., t.6, 1876 (teilweise gelesen 1873-74).

[W] K. Weierstrass: *Vorlesungen über Abel'sche Functionen*, gehalten 1869.