16.10.2019

Studienvorkurs Mathematik

Übungsblatt 3

1. Aufgabe:
Stellen Sie folgende Mengen durch Aufzählen ihrer Elemente dar:

(a) $\{x \in \mathbb{N} : x \in \mathbb{P} \text{ und } x \leq 50\}$,
(b) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + x - 6 = 0\}$,
(c) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + x - 6 = 0 \text{ und } x > 0\}$,
(d) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0\}$.

2. Aufgabe:
Untersuchen Sie die Zugehörigkeit der Elemente x, y, z zu der angegebenen Menge.

(a) $M = \mathbb{P}$ und $x = 4, y = 5, z = 6$.
(b) $M = \{a \in \mathbb{Q} : -3 \leq a \text{ und } a \leq 3\}$ und $x = -2, y = \sqrt{2}, z = 1/3$.
(c) $M = \{a \in \mathbb{R} : -3 \leq a \text{ und } a \leq 3\}$ und $x = -4, y = \sqrt{2}, z = 3$.

3. Aufgabe:
Beweisen Sie folgende Eigenschaften für die Teilmengenbeziehung:

(a) (Reflexivität): Für jede Menge M gilt $M \subseteq M$.
(b) (Transitivität): Gilt für Mengen M, N, P, dass $M \subseteq N$ und $N \subseteq P$, dann gilt auch $M \subseteq P$.
(c) Die Teilmengenbeziehung ist nicht symmetrisch.

4. Aufgabe:
Seien M, N, P Mengen. Beweisen Sie, dass

$$M \cup (N \cup P) = (M \cup N) \cup P \text{ und } M \cap (N \cap P) = (M \cap N) \cap P.$$

5. Aufgabe:
Seien M, N, P Mengen. Beweisen Sie, dass

$$M \cup (N \cap P) = (M \cup N) \cap (M \cup P) \text{ und } M \cap (N \cup P) = (M \cap N) \cup (M \cap P).$$

6. Aufgabe:
Seien M, N, P Mengen mit $M \subseteq P$ und $N \subseteq P$. Beweisen Sie, dass gilt

$$P \setminus (M \cap N) = (P \setminus M) \cup (P \setminus N)$$

und

$$P \setminus (M \cup N) = (P \setminus M) \cap (P \setminus N).$$

7. Aufgabe:
Seien M,N Mengen. Zeigen Sie, dass:

(a) $N \subseteq M$ gilt genau dann, wenn $N \cap M = N$.
(b) $N \subseteq M$ gilt genau dann, wenn $N \cup M = M$.

8. Aufgabe:
Seien M,N Mengen. Zeigen Sie, dass $M \cap N = \emptyset$ genau dann, wenn $M \setminus N = M$.

9. Aufgabe:
Überprüfen Sie, ob folgende Aussagen wahr sind:

(a) $\{x \in \mathbb{N} : x^2 - 4x + 3 = 0\} = \{1,3\}$,
(b) $1 \in \{1\}$,
(c) $\{1\} \in \{1\}$,
(d) $\{1\} \in \{\{1\}\}$,
(e) $\emptyset \in \{1,2,3\}$,
(f) $\emptyset \subseteq \{1,2,3\}$.

10. Aufgabe:
Sei M eine Menge.

(a) Bilden Sie Vereinigung, Durchschnitt und Differenz von M und sich selber.
(b) Bilden Sie Vereinigung, Durchschnitt und Differenz von M und der leeren Menge.

11. Aufgabe:
Bestimmen Sie die Elemente von der Menge

$$\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{1\})) \cap \mathscr{P}(\{\emptyset, 1\}).$$

12. Aufgabe:
Für eine endliche Menge M bezeichnen wir mit $|M|$ die Anzahl der Elemente von M. Sei nun $n \geq 1$ eine natürliche Zahl und M eine Menge mit n Elementen. Zeigen Sie, dass $|\mathscr{P}(M)| = 2^n$.