Schnelles Denken, langsames Denken und die Systemrelevanz von Metakognition

JOHANN SJUTS

Das menschliche Denken wird durch zwei kognitive Systeme bestimmt, durch das System 1 des schnellen Denkens und das System 2 des langsamen Denkens. Das erste System operiert automatisch und intuitiv, das zweite absichtlich und deliberativ. Schnelles Denken ruft kognitive Verzerrungen hervor, langsames Denken vermag sie zu korrigieren. Es gilt, bewusst richtigzustellen, wozu man sich unbewusst verleiten lässt. Für das förderliche Zusammenspiel von System 1 und System 2 ist Metakognition systemrelevant.

1 Schnelles Denken und langsames Denken

Berühmt ist die Schläger-und-Ball-Aufgabe (KAHNEMAN, 2012, 61):

> Ein Schläger und ein Ball kosten 1,10 Dollar. Der Schläger kostet einen Dollar mehr als der Ball. – Wie viel kostet der Ball?

Die Antwort, die einem schnell in den Sinn kommt, lautet: Der Ball kostet 10 Cent. Dass das stimmt, scheint aus den Angaben im Aufgabentext intuitiv klar, ja unmittelbar und ohne weitere Rechnung einleuchtend zu sein. Man ist sich sicher: Es bedarf keiner weiteren Anstrengung. Die Lösung ist einfach. Das Ergebnis ist offensichtlich: Der Schläger kostet 1 Dollar, der Ball 10 Cent.

Aber die Antwort ist falsch. Nimmt man sich einen Augenblick Zeit, erkennt man den Irrtum. Bei dieser Antwort würde der Schläger 90 Cent mehr als der Ball und nicht, wie in der Aufgabe gefordert, 1 Dollar mehr kosten. Das richtige Ergebnis lautet dagegen: Der Schläger kostet 1 Dollar und 5 Cent, der Ball 5 Cent. So sind beide Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Summe und Differenz stimmen. Der Schläger und der Ball kosten zusammen 1,10 Dollar. Der Schläger kostet einen Dollar mehr als der Ball.

Zahlreiche Versuchsgruppen haben sich mit der Schläger-und-Ball-Aufgabe beschäftigt. Mit überwiegender bis weit überwiegender Mehrheit (KAHNEMAN, 2012, 62) haben sie die falsche Antwort gegeben. Die betreffenden Versuchspersonen haben die intuitiv gefundene Antwort nicht geprüft. Das rasch in den Sinn gekommene Ergebnis reichte ihnen aus. Sie machten sich nicht die Mühe, das Ergebnis zu kontrollieren.

Das falsche Ergebnis entstammt dem schnellen Denken, das richtige dem langsamen Denken. Die Kognitionspsychologie spricht von zwei kognitiven Systemen (KAHNEMAN, 2012). Das schnelle Denken bildet das System 1, das langsame Denken das System 2. Dabei gilt: Das System 1 ist durch Impulsivität und weitgehende Mühelosigkeit, das System 2 dagegen durch Reserviertheit und erhöhten Anstrengungsaufwand gekennzeichnet. Das schnelle Denken ist ständig aktiv und verleitungsanfällig. Dabei kann Fehlerhaftes und Falsches auftreten. Das langsame Denken ist in der Regel passiv. Es muss in Gang gebracht werden, um das leichtfertig und flüchtig entstandene Unzulängliche und Unvollständige zu prüfen und zu revidieren.

Zur Schläger-und-Ball-Aufgabe drängen sich Fragen auf: Warum geben sich so viele Menschen mit einer oberflächlich plausiblen Antwort, die ihnen spontan einfällt, zufrieden? Warum prüfen sie ein nur passend erscheinendes Ergebnis nicht? Warum sind sie so wenig kritisch gegenüber sich selbst, so wenig gewillt, gründlich und genau zu sein?

Offensichtlich neigen Menschen dazu, möglichst wenig Energie für die Bewältigung einer Aufgabe einzusetzen. System 1 kommt zum Einsatz, System 2 dagegen nicht. Das hat allerdings Konsequenzen. Das schnelle Denken im System 1 betreibt einen geringen geistigen Aufwand, allzu leicht treten Verleitungen und Unrichtigkeiten auf. Das langsame Denken im System 2 betreibt hingegen einen hohen geistigen Aufwand, es behebt Verzerrungen und Fehler. Die Schläger-und-Ball-Aufgabe zeigt genau das: Durch den unterlassenen Einsatz von System 2 ist das prüfende und korrigierende Denken unterblieben. Ein wichtiger Teil der kognitiven Ressourcen ist ungenutzt geblieben.
Die Konsequenz liegt auf der Hand: Das förderliche Zusammenspiel von System 1 und System 2 bedarf der metakognitiven Begleitung mit Planung, Überwachung und Reflexion des eigenen Denkens. Metakognition ist systemrelevant. Dies ist beim Denken, Lernen und Verstehen in Schule und Unterricht von besonderer Bedeutung.

Zusammengefasst: Schnelles Denken kann kognitive Verzerrungen hervorrufen. Komplementär dazu kann langsames Denken zur Kontrolle und Korrektur führen. Es gilt, bewusst richtigzustellen, wozu man sich unbewusst verleiten lässt.

2 Kognitive Verzerrungen in der Schulmathematik

Kognitive Verzerrungen sind Gegenstand der Kognitions- und der Sozialpsychologie. Eine kognitive Verzerrung, ein Bias, ist eine Verleitung bzw. eine Tendenz zu einem verfälschten Erinnern, Denken und Urteilen. In der Mathematikdidaktik ist von Präkonzepten (von Schülervorstellungen und Fehlvorstellun-

MNU-Journal – Ausgabe 01.2021 – ISSN 0025-5866 – © Verlag Klaus Seeberger, Neuss

gen) die Rede. Gemeint sind damit individuelle singuläre Vorstellungen, die Ausdruck von Stadien in Lernprozessen sind und durch (vorläufige) Unrichtigkeit und Unvollständigkeit gekennzeichnet sind, bis sie sich zu regulären Vorstellungen entwickelt haben, die tragfähig und korrekt sind. Hierfür ist ein fachlich systematischer Unterricht nötig, der sich indes auf kognitive Verzerrungen und Präkonzepte einlässt und sie zum Gegenstand macht.

Eine essentielle berufliche Aufgabe von Lehrpersonen ist es daher, Lehr-Lern-Prozesse so zu organisieren, dass Lernende Fehlerhaftes und Falsches erfassen und beheben, dass sie Unzulänglichkeiten vorhersehen und vermeiden, dass sie also reaktiv und auch proaktiv mit Unkorrektheiten umgehen und dass sie am Ende das Richtige wissen und entsprechend zu handeln verstehen.
Sich mit Fehlern und Irrtümern zu beschäftigen, bedeutet nicht, die menschliche Intelligenz herabzusetzen (Kahneman, 2012); es gilt vielmehr, dadurch Klarheit und Genauigkeit im Denken zu erzielen.

Drei für die Schulmathematik relevante kognitive Verzerrungen seien nachfolgend dargestellt und illustriert.

Eine erste typische kognitive Verzerrung: der Bestätigungseffekt

Kognitive Verzerrungen treten in verschiedenen Formen auf. Zum Beispiel neigen Menschen dazu, Informationen auszuwählen und aufzunehmen, die ihrer vorher gebildeten Meinung entsprechen, sie neigen dazu, Informationen so zu deuten, dass sie die eigenen Erwartungen bestätigen. Man spricht dann von einem *Bestätigungseffekt* (engl. confirmation bias).

Du überholst den dritten. – Welchen Platz hast du dann?

Vorschnell ist die Antwort, dann auf dem zweiten Platz zu liegen. Dies suggeriert der Überholvorgang. Man fühlt sich in einer erbrachten Leistung bestätigt und lässt sich zu der Annahme verleiten, mit dem Vorbeiziehen am dritten in der Reihe den zweiten Platz erreicht zu haben. Tatsächlich ist lediglich der dritte Platz erreicht. Die gedankliche Vorstellung ist unterschiedlich, je nachdem, ob der, der überholt, – leichtfertig und rasch – zu einer Illusion über den neuen Platz neigt oder – nüchtern und bedacht – feststellt, vom vierten auf den dritten Platz vorgerückt zu sein.

Eine zweite typische kognitive Verzerrung: der Verankerungs- bzw. Anpassungseffekt

Vielfach bilden im Text enthaltene Zahlenangaben die Erklärung für Verzerrungseffekte.

Du bist der 10. von vorn und von hinten. – Wie viele seid ihr insgesamt?

Etwas unbekümmert sind die (falschen) Antworten 20 und 21. Diese beiden Ergebnisse lassen sich indes durch den Rückgriff auf die doppelt zu berücksichtigende Zahl 10 erklären. $10 + 10 = 20$ bzw. $10 + 1 + 10 = 21$ sind die zugehörigen Rechnungen. Hier lässt sich der so genannte Verankerungs- bzw. *Anpassungseffekt* (engl. anchoring bias) beobachten. Die Rechnungen sind durch die im Text (doppelt) vorhandene Zahl 10 verankert. Wird einem die Unvorsichtigkeit jedoch bewusst, setzt eine Kontrollüberlegung ein. Die gedankliche Organisation kann auf verschiedene Weisen erfolgen. Zu der einen Überlegung, sich selbst doppelt gezählt zu haben, gehört die Rechnung $2 \cdot 10 - 1 = 19$, zu der anderen Überlegung, dass vor einem 9 und hinter einem 9 sind, die Rechnung $9 + 1 + 9 = 19$.

Eine dritte typische kognitive Verzerrung: der Rahmungseffekt

Verleitet der Text einer Aufgabe zu einer bestimmten Annahme, eine für passend gehaltene Rechnung anzusetzen, kann man von einem auf diese Annahme bezogenen *Rahmungseffekt* (engl. framing bias) sprechen.

Zur Illustration soll das folgende Beispiel dienen.

Wenn 5 Maschinen 5 Minuten brauchen, um 5 Geräte herzustellen, wie lange brauchen dann 10 Maschinen, um 10 Geräte herzustellen?

Geht man davon aus, dass die Anzahl von produzierenden Maschinen, die Anzahl von Minuten für die Produktionszeit und die Anzahl von hergestellten Geräten sich gleichmäßig miteinander verändern, erhält man die falsche Antwort 10 Minuten. Tatsächlich brauchen in der gegebenen Situation 10 Maschinen nur 5 Minuten, um 10 Geräte herzustellen.

Zusammengefasst: Bestätigungseffekt, Verankerungs- bzw. Anpassungseffekt und Rahmungseffekt sind drei in der Mathematik auftretende kognitive Verzerrungen. Die Organisation von Lehr- und Lernprozessen hat dies zu berücksichtigen.

3 Metakognition

Metakognition wird gemeinhin verstanden als das Wissen und die Kontrolle über das eigene kognitive System. Mit dem Denken über das eigene Denken sowie der Steuerung des eigenen Denkens hat Metakognition folglich eine deklarative und eine prozedurale Komponente (Sjuts, 2003, 2018).

Die deklarative Metakognition beinhaltet das Wissen eines Menschen über eigene kognitive Gegebenheiten und Funktionen (Hasselhorn, 2010). Metawissen bezieht sich auf Personen-, Aufgaben- und Strategievariablen. Es umfasst somit zum einen das diagnostische Wissen, das jemand über das eigene Denken besitzt, zum anderen das bewertende Wissen über Aufgaben und Anforderungen und zum weiteren das strategische Wissen über Lösungswege und Erfolgsaussichten.
Die prozedurale Metakognition verbindet die vor, während und nach einer Aufgabenbearbeitung liegenden Tätigkeiten des Planens, Überwachens und Überprüfens, bei denen eine Person sich gewissermaßen selbst über die Schulter blickt. Laut zu denken oder das eigene Denken und Handeln zu protokollieren, sind Regulation und Kontrolle unterstützende Methoden (Kaiser et al., 2018). Eine Wirkung von Vorausschau, Innehalten und Rückschau kann schließlich darin liegen, die eigene Position zu überdenken und gegebenenfalls zu verändern.

Forschung über Metakognition und Ausübung von Metakognition sind hierzulande bisher wenig verbreitet (KAISER et al., 2018). Damit mangelt es an vertieften Erkenntnissen und erprobten Erfahrungen über den Einsatz metakognitiver Aktivitäten und Strategien. Und so bleiben Möglichkeiten, den Erfolg von Lehren und Lernen zu steigern, ungenutzt. Weltweite Studien haben nämlich ergeben, dass metakognitive Strategien mit dem Wert 0,69 eine sehr große Effektstärke besitzen (HATTIE, 2015, 224). Zu beachten ist indes, dass Metakognition nicht von selbst geschieht, sondern „organisch" erzeugt und „permanent" praktiziert werden muss (KAISER et al., 2018, 24).

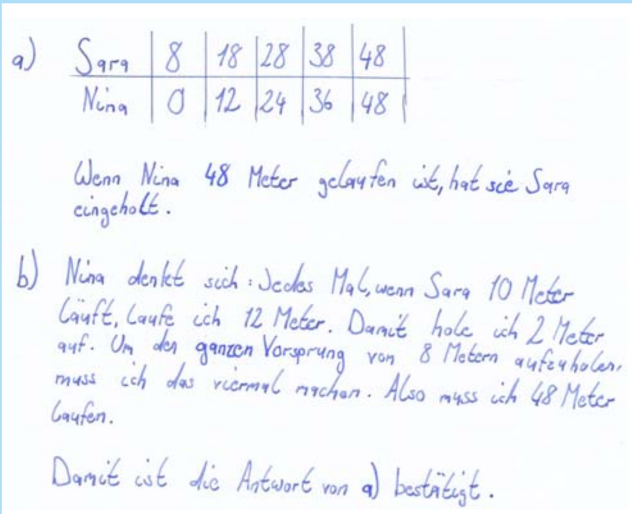
Beim Lehren und Lernen von Mathematik haben Aufgaben eine besondere Bedeutung. Aufgaben lassen sich einsetzen, um Denken, Lernen und Verstehen zu steuern. Mittels Aufgabenbearbeitungen sollen Wissen und Können auf- und ausgebaut werden. Ziel ist dabei ein hohes Maß an Verfügbarkeit und Erweiterbarkeit von Wissen und Können. Damit Aufgabenbearbeitungen in diesem Sinne eine möglichst ausgeprägte Wirksamkeit entfalten, sind ein gezieltes Bewusstmachen und ein systematisches Organisieren des eigenen Denkens, Lernens und Verstehens erforderlich (SJUTS, 2001). Gefragt ist also die denk- und lernbegleitende Metakognition.

Das folgende Beispiel (SJUTS, 2018, 24) kann die Bedeutung der Aufgabenstellung illustrieren:

Sara und Nina laufen um die Wette. Wenn Sara 10 Meter läuft, schafft Nina 12 Meter. Nina gibt ihrer Freundin 8 Meter Vorsprung.

a) Wie viele Meter muss Nina laufen, bis sie Sara eingeholt hat?
b) Versetz dich in Nina hinein: Was könnte Nina sich schon zu Beginn des Wettlaufs überlegt haben, um die Antwort zu finden?

Eine Aufgabenbearbeitung, die auf metakognitive Aktivitäten schließen lässt, findet sich in Abbildung 1. Sie enthält in Teil a) eine – mittels Wertetabelle – begründete Antwort. Eine solche Wertetabelle ist eine übliche Darstellung, die sowohl den Sachverhalt des Aufgabentextes als auch die Lösung nachvollziehbar repräsentiert.



a)

Sara	8	18	28	38	48
Nina	0	12	24	36	48

Wenn Nina 48 Meter gelaufen ist, hat sie Sara eingeholt.

b) Nina denkt sich: Jedes Mal, wenn Sara 10 Meter läuft, laufe ich 12 Meter. Damit hole ich 2 Meter auf. Um den ganzen Vorsprung von 8 Metern aufzuholen, muss ich das viermal machen. Also muss ich 48 Meter laufen.

Damit ist die Antwort von a) bestätigt.

Abb. 1. Aufgabenbearbeitung mit metakognitiven Aktivitäten

Teil b) verlangt ganz ausdrücklich Metakognition. Hier geht es nur vermeintlich darum, sich in das Denken einer anderen Person hineinzuversetzen. Tatsächlich wird das eigene Denken zum Ausdruck gebracht.

Bei der Aufgabe handelt es sich um eine typische Bewegungsaufgabe (SJUTS, 2002, 2007b). Hierzu treten in aller Regel verschiedene Lösungsansätze auf, die mit einem unterschiedlichen Zurechtlegen im Kopf zusammenhängen. Man kann – gewissermaßen von außen als unbeteiligte Person – auf den Wettlauf blicken oder – gewissermaßen von innen als beteiligte Person – sich in den Wettlauf hineinversetzen. Entsprechend kann es eine Lösung in einer statischen oder in einer dynamischen Variante geben. Damit ist auch die Metakognition unterschiedlich. Bei einer Außensicht ist eine Ergebnisdarstellung (hier in Form einer Tabelle) nützlich, wenn nicht sogar erforderlich, an der die Überwachung des Denkens erfolgt. Anders ist es bei einer Innensicht mit einer Vorgangsvorstellung. Eine Stärke des prozesshaften Denkens liegt darin, dass die Plausibilität einer Überlegung auffällt. Die Metakognition ist trotz der Unterschiedlichkeit wirksam. Die Sicht auf die Darstellung des Sachverhalts erlaubt ebenso wie die Vorstellung des Vorgangs eine passende Kontrolle der Lösung.

Schließlich ist zu erwähnen: Voraussetzung dafür, dass jemand Metakognition betreibt, ist eine entsprechende Bereitschaft (HASSELHORN, 2010). Es müssen somit Motivation und Willenskraft für den Einsatz metakognitiver Aktivitäten und Strategien vorliegen. Oder sie müssen entwickelt werden, etwa dadurch, dass die Lösung einer gestellten Aufgabe als Herausforderung empfunden wird.

Beim Bearbeiten von Aufgaben und beim Lösen von Problemen sind metakognitive Aktivitäten nicht unmittelbar ersichtlich. Sie lassen sich, wie am Beispiel verdeutlicht, durch das Verschriftlichen von Gedanken nach außen kehren. Gerade die schriftlich fixierte Überwachung und Kommentierung des eigenen Denkens und Handelns erweist sich bei alltäglichen Aufgabenbearbeitungen als besonders wirksam (SJUTS, 2018).

Zusammengefasst: Metakognition bedeutet Denken über das eigene Denken und Steuerung des eigenen Denkens. Dazu gehören Vorausschau, Innehalten und Rückschau. Metakognitive Aktivitäten bestehen darin, die vor, während und nach einer Aufgabenbearbeitung liegenden Tätigkeiten, also Planung, Überwachung und Reflexion, genau und gründlich zu betreiben. Die denk- und lernbegleitende Metakognition besitzt eine hohe Effektstärke.

4 Aufgaben

Die folgenden Ausführungen widmen sich der Frage, wie Metakognition in Gang kommen kann. Dabei werden zwei Möglichkeiten aufgezeigt, zum einen der Einsatz bestimmter Aufgaben, denen ein Anstoß zur Metakognition auf besondere Weise innewohnt, zum anderen die Erweiterung von Aufgabenstellungen um spezifische Aufforderungen zur Metakognition.

4.1 Miniaturen mathematischen Denkens mit immanenter Metakognition

Gerade kurze und knappe Aufgaben lassen sich so gestalten, dass sie eine Verführung zu einer vorschnellen Antwort enthalten. Die Voreiligkeit, die rasch deutlich wird, ist zugleich der Antrieb, die flüchtig gegebene Antwort zu überdenken.

> Wie lautet die kleinste vierstellige Zahl mit der Quersumme 12?

Spontan wird die Zahl 1119 genannt. Richtig ist indes die Antwort 1029. Dass auch die 0 vorkommen kann, wird leicht übersehen.

> Wie viele ganze Zahlen sind größer als 30, aber nicht größer als 40?

Die voreilige Antwort lautet 9, die richtige dagegen 10.

> Wie lautet das Ergebnis der Rechnung 6 geteilt durch 1/2?

Die leichtfertige Antwort 3 ist schnell gegeben. Indes führt die geläufige Rechnung 6 : 2 = 3 sogleich zu einer Verunsicherung. 6 geteilt durch 2 und 6 geteilt durch 1/2 können nicht das gleiche Ergebnis haben. Die unbedarfte Antwort wird revidiert. 6 geteilt durch 1/2 ist 12. Dies mag sich durch Rückgriff auf Divisionsregeln oder auf Grundvorstellungen zur Division ergeben.

> Im roten Bus sitzen 33 Kinder. Im grünen Bus sitzen 16 Kinder weniger als im roten Bus. – Wie viele Kinder sitzen in beiden Bussen zusammen?

Geleitet von der zur Routine gewordenen Anforderung, einen Aufgabentext in eine Rechnung zu übertragen, zudem verleitet durch den Gleichklang der Formulierungen am Anfang der Sätze („Im roten Bus sitzen 33 Kinder.“ „Im grünen Bus sitzen 16 Kinder …“) und durch das Signalwort „zusammen“ in der gestellten Frage („Wie viele Kinder sitzen in beiden Bussen zusammen?“), dürfte es nicht allzu überraschend sein, wenn 33 + 16 = 49 als Rechnung auftritt. Dabei wird das wichtige Signalwort „weniger“ im zweiten Satz des Aufgabentextes („Im grünen Bus sitzen 16 Kinder weniger als im roten Bus.“) übersehen. Im grünen Bus sitzen nämlich 17 Kinder. Eine korrekte Rechnung dazu lautet: 33 + (33 – 16) = 33 + 17 = 50.

Diese Aufgabe ist Bestandteil eines Sets von Aufgaben aus einer Interventionsstudie (Hasemann & Stern, 2002) in Klassen des 2. Schuljahres. Wesentlich sind nicht die Erscheinungen des Sachverhalts (Bus, Farben, Kinder), sondern die im Sachverhalt liegenden Beziehungen (weniger, zusammen). Zentral für die Lösung der Aufgabe ist die Übertragung der Beziehungen in eine präzise Darstellung. Damit rückt die Genauigkeit der Notation ins Augenmerk. Abstrakt-symbolische Aktivitäten sicher zu beherrschen, ist entgegen einer „sehr verbreiteten Haltung“ (Hasemann & Stern, 2002, 240) schon in der Grundschule von ausschlaggebender Bedeutung für Lernzuwachs und Lernerfolg.

> Im Wald spielen wir oft Verstecken. Heute sind wir 13 Kinder. Boris muss suchen. Nach einer Weile hat er 9 von uns gefunden. – Wie viele sind noch versteckt?

Etwas anders gelagert ist die Schwierigkeit bei dieser Aufgabe. Aber auch hier gilt es, den Text in eine adäquate symbolische Darstellung zu übertragen. Die Rechnung 13 – 9 = 4 ist durchaus naheliegend. Denn eine vordergründige Kontrolle ergibt: 9 gefundene Kinder und 4 noch nicht gefundene Kinder ergeben 13 Kinder. Allerdings gehört – das ist dem Aufgabentext zu entnehmen – auch Boris, der suchen muss, zu der Kindergruppe. Eine passende Rechnung wäre daher 13 – 1 – 9 = 3. Zur Kontrolle des Rechenansatzes ist ein sorgfältiger Abgleich zwischen Text und Term vonnöten. Hier wird die Wichtigkeit einerseits des Erstellens und andererseits des Erfassens formaler Ausdrücke (Cohors-Fresenborg & Sjuts & Sommer, 2004) für die begleitende Metakognition deutlich.

> Ein Händler kauft eine Ware für 6 Euro, verkauft sie dann für 7 Euro, kauft sie danach für 8 Euro zurück und verkauft sie daraufhin für 9 Euro. – Wie groß ist sein Gewinn?

Nicht selten erscheint bei dieser Aufgabe die Antwort 1 Euro. Diese ergibt sich durch die Schritte 1 Euro Gewinn, dann 1 Euro Verlust und dann 1 Euro Gewinn (Sjuts, 2007a). Die vier Vorgänge (zwei des Kaufens und zwei des Verkaufens) werden unzulässigerweise auf drei Vorgänge (von 6 zu 7, von 7 zu 8 und von 8 zu 9) reduziert (Sjuts, 2007a). Gibt es jedoch die Aufforderung, die Aufgabenbearbeitung schriftlich zu erläutern, wird Verborgenes aufgedeckt, wird Unsichtbares sichtbar gemacht, wird so eine Unzulänglichkeit zum Vorschein gebracht. Wie bereits ausgeführt, kann die Verschriftlichung als grundlegende metakognitive Strategie angesehen werden. Es ist bei dieser Aufgabe einzuräumen, dass sie nicht unbedingt eine Selbstkontrolle auslöst. Ein gewisses Bewusstsein, gegenüber sich selbst Rechenschaft über die Richtigkeit des eingeschlagenen Vorgehens abzulegen, muss wohl vorhanden sein. Dann kann ein Bemühen entstehen, die Vorgänge des Kaufens und Verkaufens genau zu prüfen. Erkennt man, dass der Händler beim Kaufen und Verkaufen zweimal einen Gewinn von 1 Euro, also insgesamt einen Gewinn von 2 Euro erzielt, findet man die richtige Antwort.

Eine Selbstkontrolle mag bei dieser Aufgabe allerdings durch die dargebotene Situation begünstigt werden, in der es um Geld und um vertraute Vorgänge von Kauf und Verkauf geht. Wer will sich schon selbst dabei erwischen, bei Finanzvorgängen keinen kühlen Kopf zu bewahren? Folglich ist es geboten, die Finanztransaktionen einer Kontrolle zu unterziehen und somit die eigenen Überlegungen zu rekapitulieren. Das kann dann, wenn nötig, zur Korrektur führen. Und es stärkt die Einsicht, dass die denkbegleitende Metakognition sich lohnt. Sie hilft, einen Fehler zu tilgen oder zu vermeiden.

> Jakob schaut auf Anna, aber Anna schaut auf Gregor. Jakob ist verheiratet, Gregor nicht. – Schaut eine verheiratete Person auf eine unverheiratete Person?

Die im Text enthaltenen Informationen sind einfach und klar. Auch die Frage ist leicht verständlich. Ist sie zu bejahen? Ist sie zu verneinen? In voreiliger Weise mag man das eine wie das andere vielleicht denken und dann doch unsicher werden. Man ist verwirrt. Die Antwort ist nicht ohne weiteres ersichtlich. Der verheiratete Jakob schaut auf Anna. Ist sie unverheiratet? Man weiß es nicht. Anna schaut auf den unverheirateten

Gregor. Ist sie verheiratet? Man weiß es nicht. Mit der Erkenntnis über eine fehlende Kenntnis bahnt sich indes eine Lösung an. Sie lässt sich durch eine geeignete Darstellung (Abb. 2) verdeutlichen.

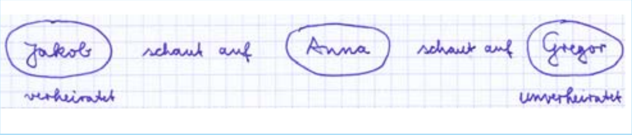


Abb. 2. Aufgabenbearbeitung mit passender Verdeutlichung

Im Fall, dass Anna unverheiratet ist, schaut eine verheiratete Person auf eine unverheiratete Person (Jakob auf Anna). Im Fall, dass Anna verheiratet ist, schaut eine verheiratete Person auf eine unverheiratete Person (Anna auf Gregor). In jedem Fall schaut also eine verheiratete Person auf eine unverheiratete Person. Die einfache und klare Antwort auf die in der Aufgabe gestellte Frage lautet also: Ja. Man muss gar nicht wissen, ob Anna verheiratet oder unverheiratet ist. Es kann völlig offenbleiben, welcher Fall in der Situation vorliegt.
Allerdings gelangt man zur Lösung erst dadurch, dass man sich einer fehlenden, aber entbehrlichen Kenntnis bewusst wird. Ein für notwendig erachtetes Wissen ist für die Lösung der Aufgabe gar nicht erforderlich. Eine Betrachtung der beiden möglichen Fälle reicht aus. Die Bewältigung der Anforderung erfolgt durch den metakognitiven Sichtwechsel. Als Unterstützung dient die Übertragung des Textes in eine Illustration.

Zusammengefasst: Die vorliegenden Aufgaben stimulieren Metakognition durch die ihnen innewohnenden Verunsicherungen und Verführungen, durch die in ihnen enthaltenen auslösenden Momente, ein unbedachtes Vorgehen zu hinterfragen, zu überdenken und zu revidieren. Die immanenten Impulse setzen metakognitive Aktivitäten in Gang. Damit verbunden ist auch eine Einsicht in die Notwendigkeit, Denk-, Lern- und Verstehensprozesse stets mit hoher Aufmerksamkeit zu überwachen.

4.2 Aufgabenstellungen zur Anregung metakognitiver Aktivitäten

Metakognition lässt sich durch passende Aufgabenstellungen auslösen. Lehrerinnen und Lehrer stehen damit vor folgenden Fragen: Wie gestaltet man Aufgaben, die Denkprozesse aufdecken und Verstehensprozesse fördern? Wie regt man metakognitive Aktivitäten an?

Dazu werden nachstehende Vorschläge für Aufgabenstellungen unterbreitet, die ausdrücklich zum Explizieren, Variieren, Formalisieren, Analysieren, Synthetisieren auffordern und darauf abzielen, dass Lernende bei der Aufgabenbearbeitung in bewusster Weise agieren. Zunächst seien diese Kategorien näher dargelegt.

Explizieren (Erläutern – Verschriftlichen – Begründen):

Erläutern kann Unsichtbares sichtbar werden lassen. („*Erläutere deine Überlegungen.*“) Verschriftlichen macht Handeln und Denken bewusst. („*Beschreibe dein Vorgehen.*“) Begründen präzisiert den Gedankengang. („*Begründe dein Ergebnis.*“)

Variieren (*Notieren – Zeichnen – Übertragen*):

Variieren der Darstellung deckt das Denken auf. („*Schreibe eine Rechnung dazu auf.*“ „*Fertige eine zeichnerische Darstellung an und beschrifte sie.*“) Aufgaben mit mehreren Lösungswegen lassen individuelles Denken zum Ausdruck kommen. Übertragen in eine andere Darstellungsform kann die Lösungswahrscheinlichkeit erhöhen.

Formalisieren (Symbolisieren – Formulieren – Repräsentieren):

Formalisieren unterstützt mathematisches Denken. Formalisieren reduziert Komplexität und schafft Durchschaubarkeit. Formulieren verdeutlicht das Erfassen und Vorstellen formaler Ausdrücke. Die Auseinandersetzung mit Wissensrepräsentationen (Schreibweisen, Äußerungen) ist zentral für metakognitive Aktivitäten.

Analysieren (Vergleichen – Kommentieren – Überprüfen):

Erörterndes Vergleichen von Aufgabenbearbeitungen mit verschiedenen Darstellungen und Ergebnissen klärt auch das eigene Denken. Analysieren und Kommentieren von Fehlvorstellungen oder Dialogen anderer dienen der Selbstförderung. Zweckmäßig sind Aufgaben zur Selbstüberprüfung der eigenen Überlegungen. („*Du wirst gefragt, wie du die Richtigkeit sicherstellst. Wie antwortest du?*“)

Synthetisieren (Ergänzen – Fortsetzen – Produzieren):

Ergänzungen, Fortsetzungen und Zusammensetzungen (vorgegebener Lösungsansätze) stimulieren das eigene Denken. Das Finden unterschiedlicher Lösungswege ist eine wirkungsvolle Form des Festigens. Das Produzieren ist Ausdruck eines verständnisintensiven Lernens.
Das abgebildete Diagramm (Abb. 3) fasst die Gestaltungskategorien für metakognitive Aktivitäten zusammen. Hinzuweisen ist darauf, dass diese sich nicht trennscharf voneinander unterscheiden. Indes kann es auch sinnvoll sein, sie ausdrücklich zu kombinieren.

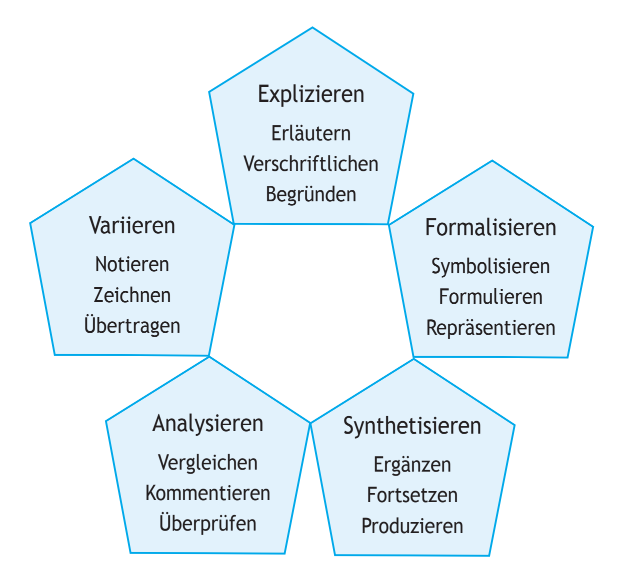


Abb. 3. Das Fünferfeld metakognitiver Aufgabenstellungen

Die nachfolgenden Beispiele dienen der Illustration der dargelegten Gestaltungskategorien für metakognitive Aktivitäten. In allen Fällen handelt es sich um Aufgaben mit kursiv gedruckten Ergänzungen, die auf vielfältige Weise Metakognition ausdrücklich veranlassen. Übliche Mathematikaufgaben lösen nicht per se metakognitive Aktivitäten aus. Die explizite Aufforderung ist also ein wichtiger Bestandteil der erweiterten Aufgabe. So sorgt schon die Aufgabenstellung dafür, dass Metakognition nicht unterbleiben kann. Die Aufforderung zu einer in Wort, Bild und Zeichen anzufertigenden Darstellung gewährleistet geradezu ein begleitendes Bewusstmachen des Vorgehens bei der Aufgabenbearbeitung.

Explizieren

$2 + 2 - 2 + 2 - 2 + 2 - 2 + 2 - 2 + 2 =$

Erläutere deine Rechnung.

Lösung:

Am Anfang ist eine 2 und am Ende ist +2 und das andere muss nicht mitgezählt werden. Das ergibt 4.

Abb. 4. Aufgabenstellung Explizieren und eine Aufgabenbearbeitung

Variieren

Beim Sommerfest sind 10 Personen zum Sackhüpfen gestartet. Am Abend erzählt Jonas zu Hause, dass doppelt so viele Kinder vor ihm über die Ziellinie gehüpft sind wie hinter ihm ins Ziel kamen. – Welchen Platz belegte Jonas?

a) Schreibe auf, wie du deine Antwort findest.
b) Du wirst gefragt, wie du die Richtigkeit sicherstellst. Gib dazu die Begründung deines Ergebnisses in einer anderen Art der Darstellung an.

Lösung:

a) Insgesamt waren es 10 Kinder, ohne Jonas waren es 9 Kinder. Dann sind 6 vor ihm und 3 hinter ihm ins Ziel gekommen. Jonas hat also den 7. Platz belegt.

b) Dazu zeichne ich zuerst die 10 Plätze für die Reihenfolge im Ziel:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
X	X	+	+	o	o		o	+	X

Immer, wenn ich zwei Kinder vorn einfüge, füge ich eins hinten ein. Dann bleibt der 7. Platz für Jonas.

Abb. 5. Aufgabenstellung Variieren und eine Aufgabenbearbeitung

Explizieren: Die Aufgabe stammt in ihrer ursprünglichen Form aus dem Känguru-Wettbewerb 2002 (Klassenstufen 3 und 4, Nr. 2, geringer Schwierigkeitsgrad). Lösungen zeigen, welche Unterstützung Verschriftlichung und Erläuterung bieten (wie auch hier: Abb. 4 unten). Offensichtlich wird dadurch für die Lösung sogar weniger Zeit benötigt. Und die Fehleranfälligkeit ist gegenüber dem Rechnen allein im Kopf geringer.

Variieren: Die Aufgabe (Sjuts, 2018, 24) in Abbildung 5 verlangt in Teil a) eine Darlegung des Lösungswegs und in Teil b) eine Überprüfung mittels eines Darstellungswechsels. Die Aufgabenbearbeitung (Abb. 5 unten) enthält zwei gedankliche Ansätze, einen numerisch-rechnerischen und einen tabellarisch-zeichnerischen. Die in der Aufgabe gestellte Anforderung, verschiedene Repräsentationen für die Aufgabenbearbeitung zu finden, veranlasst eine effektive Metakognition.

Formalisieren

Dagobert legt sein Geld gewinnbringend an, wodurch es sich verdoppelt. Nachdem er einen Gulden ausgegeben hat, legt er das restliche Geld wieder an, wodurch es sich abermals verdoppelt. Nachdem er zwei Gulden ausgegeben hat, legt er das restliche Geld noch einmal an, wodurch es sich erneut verdoppelt. Nachdem er weitere vier Gulden ausgegeben hat, verbleiben ihm zwölf Gulden. – Wie viele Gulden hatte er anfangs?

Schreibe die Rechenschritte vollständig auf. Achte auf genaue Schreibweisen.

Lösung:

$((x \cdot 2 - 1) \cdot 2 - 2) \cdot 2 - 4 = 12$ Gulden

F: Wie viele Gulden hat er am Anfang?

R: Ich rechne die Umkehraufgabe.

$(((12 + 4) : 2 + 2) : 2 + 1) : 2$
$= ((16 : 2 + 2) : 2 + 1) : 2$
$= ((8 + 2) : 2 + 1) : 2$
$= (10 : 2 + 1) : 2$
$= (5 + 1) : 2$
$= 6 : 2$
$= 3$

A: Am Anfang hatte er 3 Gulden.

Abb. 6. Aufgabenstellung Formalisieren und eine Aufgabenbearbeitung

Formalisieren: Viele passende Aufgaben der Schulmathematik sind mit Bearbeitungshinweisen im Internet verfügbar, so auch diese (Abb. 6; http://www.spasslernen.de/algebra/alg38.htm, Zugriff: 5. Oktober 2020). Eine Lösung ist mit

Analysieren

Zu Werbezwecken senkt ein Zirkus seinen Eintrittspreis für einen Abend um 20 %. Dennoch bleibt die Einnahme genauso hoch wie am Vorabend. – Um wie viel Prozent ist die Besucherzahl gestiegen?

Anna behauptet, es sind 12,5 %, Julia hält 20 % für richtig, Laura meint, es sind 25 %, während Maria denkt, dass es 80 % sind. Wer hat Recht? Begründe. Schreibe für jede andere einen kurzen Text, mit dem du auf den jeweiligen Fehler eingehst und eine Hilfe anbietest.

Lösung:

Eine Verringerung um 20% bedeutet eine Veränderung auf das 0,8-fache. Um diese auszugleichen, ist eine Veränderung auf das 1,25-fache nötig, denn $0{,}8 \cdot 1{,}25 = 1$. Das bedeutet eine Erhöhung um 25%. Laura hat Recht.

Diese Rechnung ist eine Hilfe für die anderen.

Julia würde ich sagen, dass 20% Verringerung und 20% Erhöhung sich nicht ausgleichen, obwohl man das vielleicht meint. Man kann das so prüfen: $0{,}8 \cdot 1{,}2 = 0{,}96$

Für Anna: $0{,}8 \cdot 1{,}125 = 0{,}9$
Vielleicht hat sie sich verrechnet.

Und für Maria: $0{,}8 \cdot 1{,}8 = 1{,}44$
Vielleicht hat sie einfach $20\% + 80\% = 100\%$ gerechnet.

Abb. 7. Aufgabenstellung Analysieren und eine Aufgabenbearbeitung

Mitteln der Algebra möglich, eine andere erfolgt über das Rückwärtsarbeiten (Abb. 6 unten). Ersichtlich ist, dass beide Lösungsvarianten eine präzise Darstellung erfordern, deren Kontrolle indes durch die symbolische Notation besonders begünstigt wird.

Analysieren: Die Aufgabe in Abbildung 7 stammt in der ursprünglichen Fassung aus dem Känguru-Wettbewerb 2000 (Klassenstufen 7 und 8, Nr. 10, geringer Schwierigkeitsgrad). Die vorgenommene Aufgabenerweiterung nimmt naheliegende Fehlantworten auf und verlangt eine Klärung, eine Analyse und eine Hilfestellung (Abb. 7 unten). Eine Kommentierung legt das Denken anderer und das eigene Denken offen. Wer sich mit der Aufgabe beschäftigt, erfährt nicht nur, dass es erklärbare Fehler gibt, sondern lernt auch, mit anderen, die Fehler machen, respektvoll und verständnisvoll umzugehen.

Synthetisieren: Die in Abbildung 8 vorliegende Abwandlung einer Aufgabe aus der Mathe-Welt (2004, 12) nutzt ein Gestaltungsformat zur diskursiven Auseinandersetzung. Die erweiterte Aufgabenstellung enthält bestimmte Lücken. Eine denkbare falsche und eine richtige Begründung sind in der Bearbeitung also zu ergänzen. Die Aufgabe veranlasst ein bewusstes Organisieren und Reorganisieren des Denkens (Abb. 8 unten).

Zusammengefasst: Beim Mathematiklernen sind Aufgabenstellungen und Aufgabenbearbeitungen von wesentlicher Bedeutung. Spezifische Aufgabenstellungen zum Explizieren, Variieren, Formalisieren, Analysieren und Synthetisieren sind probate Mittel, das eigene Denken zu kontrollieren und zu regulieren. Damit wird den Lernenden abverlangt, bei der Aufgabenbearbeitung in bewusster Weise zu agieren, Fehlerhaftes und Falsches selbst zu ermitteln und Überarbeitungen und Verbesserungen gezielt vorzunehmen.

5 Fazit

Schnelles Denken ist durch Umstandslosigkeit und Leichtigkeit gekennzeichnet. Es ist jedoch verzerrungsanfällig. Langsames Denken ist dagegen durch Reflexion und Anstrengung bestimmt.
Es ist jedoch faul. Aber es vermag das schnelle Denken zu kontrollieren und zu korrigieren. Nötig ist folglich das förderliche Wechselspiel der beiden kognitiven Systeme, essentiell ist dafür eine begleitende Metakognition.
Zum Lernen von Mathematik gehört die fortschreitende Weiterentwicklung von individuellen singulären Vorstellungen zu regulären Vorstellungen. Im Laufe solcher Entwicklungsprozesse tritt Fehlerhaftes, Falsches und Irrtümliches auf, das sich in Präkonzepten und Fehlvorstellungen niederschlägt. Nötig ist ein Unterricht, der sich auf sie einlässt und sie zum Gegenstand macht. Damit wird Metakognition zu einem zentralen Bestandteil von mathematischen Denk-, Lern- und Verstehensprozessen.
Aufgaben haben eine besondere Bedeutung, metakognitive Aktivitäten und Strategien auszulösen. Diese können durch immanente Impulse oder explizite Aufforderungen in Gang kommen. Entscheidend ist, dass Metakognition organisch erzeugt und permanent praktiziert wird. Metakognition ist systemrelevant.

Synthetisieren

Linda muss in diesem Schuljahr sechs Arbeiten in Englisch schreiben. Die ersten beiden gingen mit 3 und 4 aus; der Durchschnitt daraus ist 3,5. – Was muss sie im Durchschnitt in den restlichen vier Arbeiten erzielen, wenn sie insgesamt durchschnittlich auf 2,5 kommen will?

Charlotte und Johanna unterhalten sich über ihre Lösungen. Charlotte nennt 2,0, während Johanna 1,5 für richtig hält. Charlotte versucht, auf Johanna einzugehen: „Du denkst, dass 1,5 richtig ist, weil du ..., aber ...“ Vervollständige Charlottes Erklärung.

Lösung:

weil du denkst, mit dem Durchschnitt 1,5 und dem Durchschnitt 3,5 auf den Gesamtdurchschnitt 2,5 zu kommen, aber es sind einmal vier und einmal zwei Arbeiten.

Du musst so rechnen: 2,5 · 6 = 15, 15 − 7 = 8, 8 : 4 = 2

Also muss 2,0 der Durchschnitt der vier Arbeiten sein.

Abb. 8. Aufgabenstellung Synthetisieren und eine Aufgabenbearbeitung

Literatur

COHORS-FRESENBORG, E., SJUTS, J. & SOMMER, N. (2004). Komplexität von Denkvorgängen und Formalisierung von Wissen. In M. NEUBRAND (Hg.), *Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland. Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA 2000* (S. 109–144). Wiesbaden: VS Verlag.

HASEMANN, K. & STERN, E. (2002). Die Förderung des mathematischen Verständnisses anhand von Textaufgaben – Ergebnisse einer Interventionsstudie in Klassen des 2. Schuljahres. *Journal für Mathematik-Didaktik 23*(3/4), 222–242.

HASSELHORN, M. (2010). Metakognition. In D. H. ROST (Hg.), *Handwörterbuch Pädagogische Psychologie* (4., überarbeitete und erweiterte Auflage, S. 541–547). Weinheim: Beltz.

HATTIE, J. (2015). *Lernen sichtbar machen*. Baltmannsweiler: Schneider.

KAHNEMAN, D. (2012). *Schnelles Denken, langsames Denken*. München: Siedler.

KAISER, A., KAISER, R., LAMBERT, A. & HOHENSTEIN, K. (2018). *Metakognition: Die Neue Didaktik*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

SJUTS, J. (2001). Aufgabenstellungen zum Umgang mit Wissen(srepräsentationen). *Der Mathematikunterricht, 47*(1), 47–60.

SJUTS, J. (2002). Unterschiedliche mentale Konstruktionen beim Aufgabenlösen. Eine Fallstudie zur Mathematik als Wissensrepräsentation. *Journal für Mathematik-Didaktik, 23*(2), 106–128.

SJUTS, J. (2003). Metakognition per didaktisch-sozialem Vertrag. *Journal für Mathematik-Didaktik, 24*(1), 18–40.

SJUTS, J. (2007a). Kompetenzdiagnostik im Lernprozess – auf theoriegeleitete Aufgabengestaltung und -auswertung kommt es an. *mathematica didactica, 30*(2), 33–52.

SJUTS, J. (2007b). Kognitionsanalysen als Bedingung der Möglichkeit von Prozessdiagnostik in Echtzeit. In B. BARZEL, T. BERLIN, D. BERTALAN & A. FISCHER (Hg.), *Algebraisches Denken*. Festschrift für Lisa Hefendehl-Hebeker (S. 123–135). Hildesheim: Franzbecker.

SJUTS, J. (2018). Metakognitive Strategien in Mathematik. *mathematik lehren 211*, 20–24.

Känguru-Wettbewerb von 1998 bis 2019. Online: https://www.mathe-kaenguru.de/chronik/aufgaben/index.html. [Zugriff: 5. Oktober 2020].

Mathe-Welt (2004). *mathematik lehren 127*.

Prof. Dr. JOHANN SJUTS, sjuts-leer@t-online.de, ist außerplanmäßiger Professor für Mathematikdidaktik an der Universität Osnabrück, bis 2018 war er Leiter des Studienseminars Leer für das Lehramt an Gymnasien. Seine Arbeitsbereiche sind die kognitionswissenschaftliche Orientierung des Mathematikunterrichts, die Diagnostik im Fach Mathematik sowie die Professionalisierung von Lehrkräften.